

对称图形——圆专题讲义

2.3 确定圆的条件

课标知识与能力目标

1. 经历不在同一条直线上的三点确定一个圆的探索过程
2. 了解三角形的外接圆、三角形的外心、圆的内接三角形的概念
3. 会过不在同一条直线上的三点作圆

知识点 1：确定圆的条件

不在同一条直线上的三个点确定一个圆。

注意：（1）这里的“三个点”不是任意的三点，而是指不在同一条直线上的三个点，在同一直线上的三个点不能画圆。

（2）“确定”一词应理解为“有且只有”，即过不在同一条直线上的三点有且只有一个圆。

（3）过一点可画无数个圆，过两点也能画无数个圆，过不在同一条直线上的三点能画且只能画一个圆。

典型例题

考点 1：命题的判定

例 1 下列四个命题中，正确的一个是（ ）

- A. 过两点一定可以作一个且只可以作一个圆
- B. 过三点一定可以作一个且只可以作一个圆
- C. 过不在同一直线上的三点一定可以作一个且只可以作一个圆
- D. 过不在同一直线上的四点一定可以作一个且只可以作一个圆

例 2 可以作圆，且只可以作一个圆的条件是

()

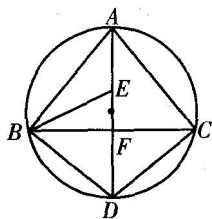
- | | |
|------------|------------------|
| A. 已知圆心的位置 | B. 已知圆的半径大小 |
| C. 过三个点 | D. 过不在同一条直线上的三个点 |

考点 2：证明三点共圆

例 1 如图，AD 为 $\triangle ABC$ 外接圆的直径， $AD \perp BC$ ，垂足为 F， $\angle ABC$ 的平分线交 AD 于点 E，连接 BD、CD。

(1) 求证：BD = CD；

(2) 请判断 B、E、C 三点是否在以点 D 为圆心，以 DB 为半径的圆上？并说明理由。



知识点 2：三角形的外接圆

1. 三角形外接圆的概念

三角形的三个顶点确定一个圆，这个圆叫做三角形的外接圆。外接圆的圆心叫做三角形的外心，这个三角形叫做这个圆的内接三角形。

注意：（1）三角形的外心是三角形任意两边的垂直平分线的交点，因此三角形的外心到三角形各顶点的距离相等。

（2）三角形的外接圆有且只有一个，即对于给定的三角形，其外心是唯一的，但一个圆的内接三角形却有无数个，这些三角形的外心重合。

（3）锐角三角形的外心在三角形内，钝角三角形的外心在三角形外，直角三角形的外心在斜边（斜边中点）。

2. 三角形外接圆的作法

要作三角形的外接圆只要找到外接圆的圆心即可，而外接圆的圆心是三角形三条边的垂直平分线的交点。所以只需作出两条边的垂直平分线的交点，就可以确定外接圆的圆心。

典型例题

考点 1：命题的判定

例 1 下列命题正确的是 ()

- A. 三点确定一个圆
- B. 三角形的外心是三角形三个角的平分线的交点
- C. 圆有且只有一个内接三角形
- D. 三角形的外心是三角形任意两边的垂直平分线的交点

例 2 下列命题正确的是 ()

- A. 三点确定一个圆
- B. 一个三角形有且仅有一个外接圆
- C. 一个圆有且仅有一个内接三角形
- D. 任何菱形都有一个外接圆

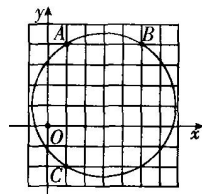
例 3 对于三角形的外心，下列说法正确的是 ()

- A. 它到三角形三边的距离相等
- B. 它是三角形三条高的交点
- C. 它一定在三角形的内部
- D. 它到三角形任意一个顶点的距离等于外接圆的半径

考点 2：利用三角形外接圆性质确定圆心

例 1 如图，在平面直角坐标系中，点 A、B、C 的坐标分别为(1, 4)，(5, 4)，(1, -2)，则过 A、B、C 三点的圆的圆心坐标是 ()

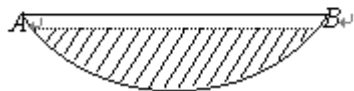
- A. (2, 3) B. (3, 2) C. (1, 3) D. (3, 1)



例 2 某居民小区一处圆柱形的输水管道破裂，维修人员为更换管道，需确定管道圆形截面的半径，下图是水平放置的破裂管道有水部分的截面.

(1) 请你补全这个输水管道的圆形截面；

(2) 若这个输水管道有水部分的水面宽 $AB=16\text{cm}$ ，水面最深地方的高度为 4cm ，求这个圆形截面的半径.

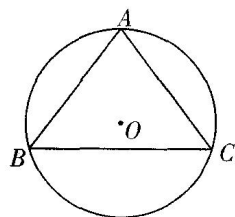


考点 3：计算三角形外接圆半径

例 1 (1) 已知一个三角形的边长分别为 6 cm 、 8 cm 、 10 cm ，则这个三角形的外接圆的面积为_____.

(2) 已知一个直角三角形的两边长分别为 3 cm 和 4 cm ，则这个三角形的外接圆的半径为_____.

例 2 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC=10$ ， $BC=12$ ，求 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径.



能力提优

题型 1：探究型问题

例 1 观察计算

当 $a=5$, $b=3$ 时, $\frac{a+b}{2}$ 与 \sqrt{ab} 的大小关系是_____;

当 $a=4$, $b=4$ 时, $\frac{a+b}{2}$ 与 \sqrt{ab} 大小关系是_____.

探究证明

如图, $\triangle ABC$ 为圆 O 的内接三角形, AB 为直径, 过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D , 设 $AD=a$, $BD=b$.

(1)分别用 a , b 表示线段 OC 、 CD 的长;

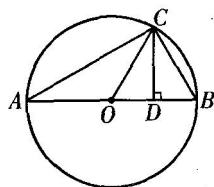
(2)探求 OC 与 CD 表达式之间存在的关系. (用含 a , b 的式子表示)

归纳结论

根据上面的观察计算、探究证明, 你能得出 $\frac{a+b}{2}$ 与 \sqrt{ab} 的大小关系是: _____.

实践应用

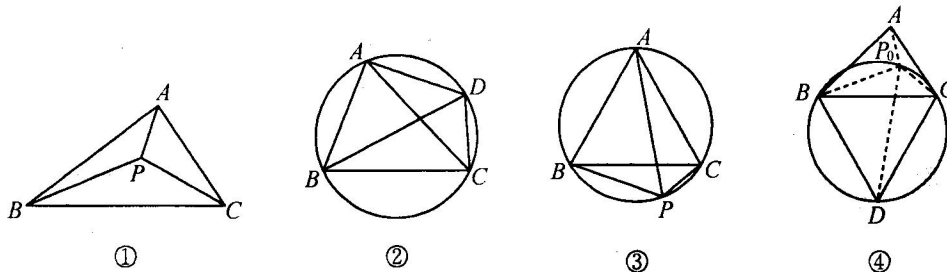
要制作面积为 1m^2 的长方形镜框, 直接利用探究得出的结论, 求出镜框周长的最小值.



例2 阅读理解：

①如图①，若 $\triangle ABC$ 所在平面上存在一点 P ，使它到三角形三顶点的距离之和最小，则称点 P 为 $\triangle ABC$ 的费马点，此时 $PA+PB+PC$ 的值为 $\triangle ABC$ 的费马距离。

②如图②，若四边形 $ABCD$ 的四个顶点在同一个圆上，则有 $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$ ，此为托勒密定理。



知识迁移：

①请你利用托勒密定理，解决如下问题：

如图③，已知点 P 为等边三角形 ABC 外接圆的 \widehat{BC} 上任意一点。求证： $PB+PC=PA$ 。

②根据(2)①的结论，我们有如下探寻三角形 ABC (其中 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 均小于 120°)的费马点和费马距离的方法：

第一步：如图④，在 $\triangle ABC$ 的外部以 BC 为边长作等边三角形 BCD 及其外接圆；

第二步：在 \widehat{BC} 上取一点 P_0 ，连接 P_0A 、 P_0B 、 P_0C 、 P_0D 。

易知 $P_0A+P_0B+P_0C=P_0A+(P_0B+P_0C)=P_0A+$ _____；

第三步：请你根据(1)①中定义，在图④中找出 $\triangle ABC$ 的费马点 P ，线段_____的长度即为 $\triangle ABC$ 的费马距离。

(3)知识应用：

2012年4月，我国西南地区出现了罕见的持续干旱现象，许多村庄出现了人、畜饮水困难。为解决老百姓饮水问题，解放军某部到云南某地打井取水。

已知三村庄 A 、 B 、 C 构成了如图⑤所示的 $\triangle ABC$ (其中 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 均小于 120°)，现选取一点 P 打水井，使水井 P 到三村庄 A 、 B 、 C 所铺设的输水管总长度最小。求输水管总长度的最小值。

