

## 对称图形——圆专题讲义

### 2.4 圆周角

#### 课标知识与能力目标

- 1.理解圆周角的概念，并能正确地识别圆周角
- 2.掌握圆周角定理及其推论，并能灵活地运用它们
- 3.通过对圆周角定理的证明，掌握分类讨论和化归两种重要的数学思想

#### 知识点 1：圆周角的概念

顶点在圆上，且两边都和圆相交的角叫做圆周角。

注意：判断一个角是否为圆周角，关键是看这个角是否同时满足下列两个条件：（1）角的顶点在圆上（2）角的两边都与圆相交。

#### 知识点 2：圆周角定理

在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等，都等于这条弧所对的圆心角的一半。

注意：

（1）这一定理应用的前提条件是在“同圆或等圆中”，且不能丢掉“同弧或等弧所对的”这一条件。

（2）定理的逆命题也成立，即在同圆或等圆中，如果两个圆周角相等，那么它们所对的弧长也相等。

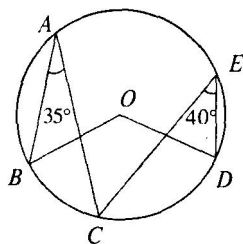
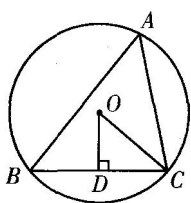
（3）由于圆心角的度数与它所对的弧的度数相等，所以圆周角的度数等于它所对的弧的度数的一半。

#### 典型例题

##### 考点 1：利用圆周角性质求角度

例 1 如图， $\triangle ABC$  内接于  $\odot O$ ， $OD \perp BC$  于点  $D$ ， $\angle A = 50^\circ$ ，则  $\angle OCD$  的度数是 ( )

- A.  $40^\circ$       B.  $45^\circ$       C.  $50^\circ$       D.  $60^\circ$

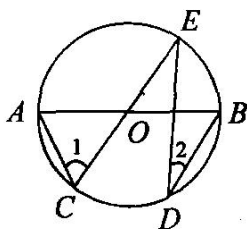


例 2 如图，若  $\angle BAC = 35^\circ$ ， $\angle DEC = 40^\circ$ ，则  $\angle BOD$  的度数为( )

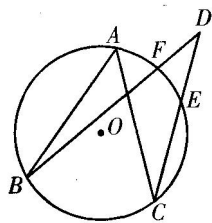
- A.  $75^\circ$       B.  $80^\circ$       C.  $135^\circ$       D.  $150^\circ$

例 3 如图， $AB$  为  $\odot O$  的直径， $C$ 、 $D$ 、 $E$  都是  $\odot O$  上的点，则  $\angle 1 + \angle 2 =$  ( )

- A.  $45^\circ$       B.  $180^\circ$       C.  $90^\circ$       D.  $75^\circ$

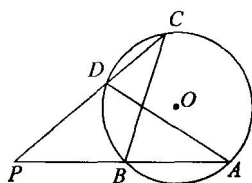


例 4 如图，点 A、B、C 在  $\odot O$  上，点 D 在圆外， $\angle ABD = 15^\circ$ ，CD、BD 分别交  $\odot O$  于点 E、F，且 F 是  $\widehat{AE}$  的中点， $\angle D = 35^\circ$ ，求  $\angle BAC$  的度数.

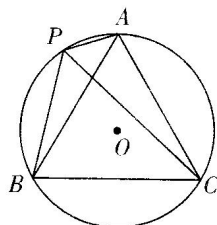


### 考点 2: 利用圆周角性质证明线段相等

例 1 如图，已知  $\odot O$  的弦 AB、CD 的延长线相交于点 P，且  $DA = DP$ ，BC 与 BP 相等吗？为什么？



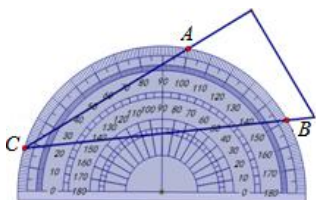
例 2 如图， $\angle APC = \angle CPB = 60^\circ$ ，请推测  $\triangle ABC$  是什么三角形，并证明猜想的正确性.



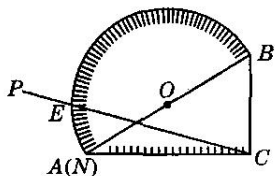
### 能力提优

#### 题型 1: 圆周角性质的应用

例 1 (2015•张家界) 将量角器按如图所示的方式放置在三角形纸板上, 使顶点  $C$  在半圆上, 点  $A$ 、 $B$  的读数分别为  $100^\circ$ 、 $150^\circ$ , 则  $\angle ACB$  的大小为\_\_\_\_\_度.

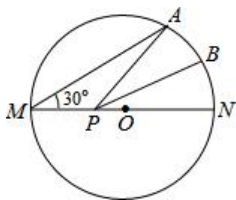


例 2 如图, 量角器的直径与直角三角板  $ABC$  的斜边  $AB$  重合, 其中量角器  $0$  刻度线的端点  $N$  与点  $A$  重合, 射线  $CP$  从  $CA$  处出发沿顺时针方向以每秒  $3$  度的速度旋转,  $CP$  与量角器的半圆弧交于点  $E$ , 第  $24$  秒, 点  $E$  在量角器上对应的读数是\_\_\_\_\_°.



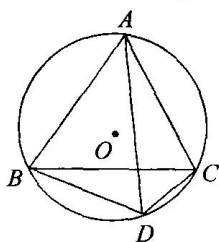
#### 题型 2: 利用圆周角的性质求最短距离

例 1 (2014•贵州) 如图,  $MN$  是半径为  $1$  的  $\odot O$  的直径, 点  $A$  在  $\odot O$  上,  $\angle AMN = 30^\circ$ , 点  $B$  为劣弧  $AN$  的中点. 点  $P$  是直径  $MN$  上一动点, 则  $PA + PB$  的最小值为\_\_\_\_\_.



#### 题型 3: 圆中截长补短证线段间数量关系

例 1 如图,  $\triangle ABC$  是等边三角形,  $D$  是  $\widehat{BC}$  上任一点, 请判断  $BD$ 、 $CD$  和  $DA$  间的关系.



### 知识点 3：圆周角定理的推论

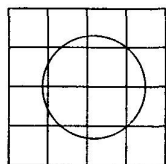
直径（或半圆）所对的圆周角是直角。 $90^\circ$  的圆周角所对的弦是直径。

注意：把圆中的直径与  $90^\circ$  的圆周角联系在一起，构造直径所对的圆周角是解决与圆有关问题的常用方法。

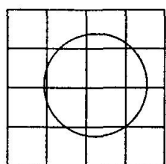
### 典型例题

#### 考点 1： $90^\circ$ 的圆周角所对的弦是直径应用

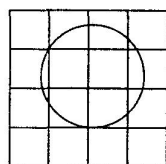
例 1 下列格点图中都给出了圆，只用直尺就能确定圆心的是 ( )



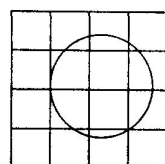
A



B

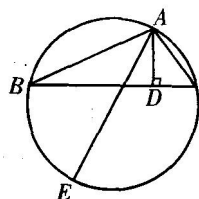


C



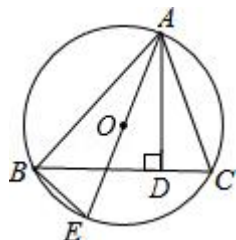
D

例 2 如图，A、B、E、C 四点都在圆 O 上，AD 是  $\triangle ABC$  的高， $\angle EAB = \angle DAC$ ，问：AE 是  $\odot O$  的直径吗？为什么？

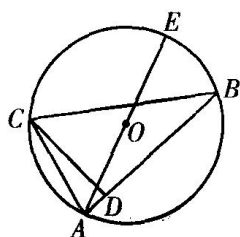


**考点 2：利用直径所对圆周角是直角构造相似三角形求弦长，直径**

例 1 (2014•海南) 如图,  $AD$  是  $\triangle ABC$  的高,  $AE$  是  $\triangle ABC$  的外接圆  $\odot O$  的直径, 且  $AB=4\sqrt{2}$ ,  $AC=5$ ,  $AD=4$ , 则  $\odot O$  的直径  $AE=$ \_\_.



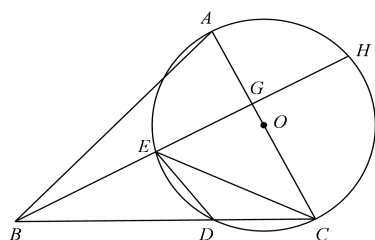
例 2 如图, 已知半径为 5 cm 的  $\odot O$  是  $\triangle ABC$  的外接圆,  $CD$  是  $AB$  边上的高,  $AE$  是  $\odot O$  的直径. 若  $AC=6$  cm,  $BC=9$  cm. 求  $CD$  的长.



例 3 (2014 年苏州星海二模) 已知: 在  $\triangle ABC$  中, 以  $AC$  边为直径的  $\odot O$  交  $BC$  于点  $D$ , 在劣弧  $\widehat{AD}$  上取一点  $E$  使  $\angle EBC = \angle DEC$ , 延长  $BE$  依次交  $AC$  于  $G$ , 交  $\odot O$  于  $H$ .

(1) 求证:  $AC \perp BH$

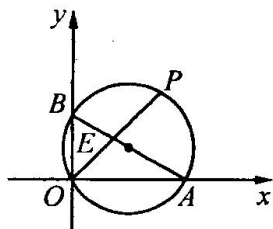
(2) 若  $\angle ABC = 45^\circ$ ,  $\odot O$  的直径等于 10,  $BD = 8$ , 求  $CE$  的长.



### 能力提优

#### 题型 1：圆与解斜三角形结合

例 1 如图，已知 A、B 两点的坐标分别为  $(2\sqrt{3}, 0)$ 、 $(0, 2)$ ，P 是  $\triangle AOB$  外接圆上的一点，且  $\angle AOP = 45^\circ$ ，则点 P 的坐标为\_\_\_\_\_.



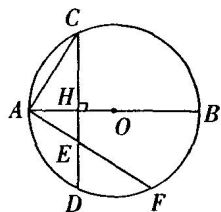
#### 题型 2：利用直径所对圆周角是直角构造相似三角形

例 1 如图，AB 是  $\odot O$  的直径，弦  $CD \perp AB$ ，垂足为 H.

(1)求证： $AH \cdot AB = AC^2$ .

(2)若过 A 的直线与弦 CD(不含端点)相交于点 E，与  $\odot O$  相交于点 F，则  $AE \cdot AF = AC^2$  是否成立?并说明你的理由.

(3)若过 A 的直线与直线 CD 相交于点 P，与  $\odot O$  相交于点 Q，则  $AP \cdot AQ = AC^2$  是否成立?(不必证明)



#### 知识点 4: 圆内接四边形

1. 定义: 一个四边形的四个顶点都在一个圆上, 这个四边形叫做圆的内接四边形, 这个圆叫做四边形的外接圆。
2. 性质定理: 圆内接四边形的对角互补, 并且任何一个外角都等于它的相邻内角的对角。
3. 判定定理 如果一个四边形的对角互补, 那么它的四个顶点在同一个圆上 (简称四点共圆)。
4. 推论 如果四边形的一个外角等于它的内角的对角, 那么它的四个顶点共圆。

**注意:** (1) 任何圆都有圆内接四边形, 但并不是所有四边形都有外接圆。

(2) 圆的内接四边形可以有无数个, 如果四边形有外接圆, 那么它只有一个外接圆。

(3) 圆内接四边形对角互补的性质是计算圆周角的重要依据之一。

#### 典型例题

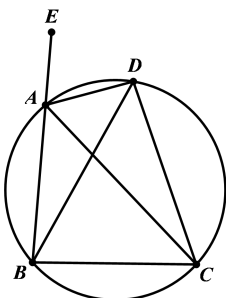
##### 考点 1: 利用圆内接四边形的性质求角度

例 1 圆内接四边形 ABCD 中,  $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3$ , 则  $\angle D =$  \_\_\_\_\_.

##### 考点 2: 利用圆内接四边形的性质进行证明

例 1 已知: 如图, AD 是  $\triangle ABC$  的外角  $\angle EAC$  的平分线, 与  $\triangle ABC$  的外接圆交于点 D。

求证:  $DB = DC$ 。



例 2 如图,  $\odot O_1$  与  $\odot O_2$  都经过 A, B 两点, 经过点 A 的直线 CD 与  $\odot O_1$  交于点 C, 与  $\odot O_2$  交于点 D, 经过点 B 的直线 EF 与  $\odot O_1$  交于点 E, 与  $\odot O_2$  交于点 F。

求证:  $CE \parallel DF$ 。

