

对称图形——圆专题讲义

2.5 直线与圆的位置关系

课标知识与能力目标

1. 掌握直线和圆的位置关系及判定方法
2. 掌握切线的判定和性质，并能运用它们解决相关的问题
3. 了解三角形的内切圆、三角形的内心等概念，会作一个三角形的内切圆

知识点 1：直线与圆的位置关系

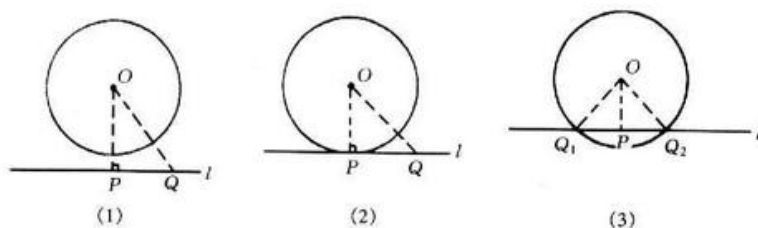
(1) 直线与圆有三种位置关系：相交、相切和相离。

① 直线与圆有两个公共点时，叫做直线与圆相交，这时直线叫做圆的割线。

② 直线与圆有唯一公共点时，叫做直线与圆相切，这条直线叫做圆的切线，这个公共点叫做切点。

③ 直线与圆没有公共点时，叫做直线与圆相离。

(2) 直线与圆的位置关系的性质和判定：



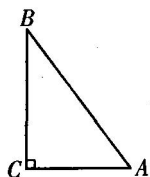
注意：判断直线与圆的位置关系有两种方法：一是看直线与圆的公共点的个数；二是看圆心到直线的距离与半径之间的数量关系。

典型例题

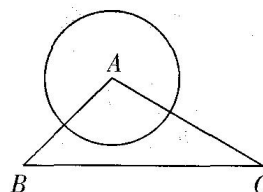
考点 1：判断直线与圆的位置关系

例 1 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $BC=4\text{ cm}$ ， $AC=3\text{ cm}$ ，以点 C 为圆心， r 为半径画 $\odot C$ ， $\odot C$ 与直线 AB 有怎样的位置关系？为什么？

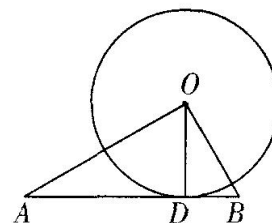
(1) $r=2\text{ cm}$ ； (2) $r=2.4\text{ cm}$ ； (3) $r=3\text{ cm}$ 。



例 2 有一个圆形的森林公园，点 A 是圆心，半径是 3 km ，如图所示。在森林公园附近有 B 、 C 两个村庄，现要在 B 、 C 两村庄之间修一条长 2 km 的笔直公路将两村连通，经测量得 $\angle ABC=45^\circ$ ， $\angle ACB=30^\circ$ 。问：此公路是否会穿过森林公园？请说明理由。



例 3 如图， $\odot O$ 的半径为 6 cm， $OD \perp AB$ ，垂足为点 D， $\angle AOD = \angle B$ ， $AD = 12$ cm， $BD = 3$ cm. 求证：AB 是 $\odot O$ 的切线.



考点 2：由直线与圆的位置关系求半径的取值或取值范围

例 1 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 5$ cm， $BC = 4$ cm， $AC = 3$ cm

- (1) 若以 C 为圆心，2 cm 长为半径画 $\odot C$ ，则直线 AB 与 $\odot C$ 的位置关系如何？
- (2) 若直线 AB 与半径为 r 的 $\odot C$ 相切，求 r 的值.
- (3) 若直线 AB 与半径为 r 的 $\odot C$ 相交，试求 r 的取值范围.

例 2 已知 $\odot O$ 的圆心 O 到直线 l 的距离为 d， $\odot O$ 的半径为 r. 如果 d, r 是关于一元二次方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 的两个根，那么直线 l 与 $\odot O$ 相切时，m 的值为_____.

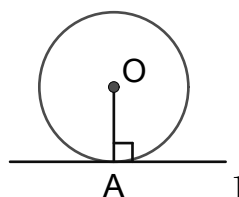
知识点 2：切线的判定定理

切线的判定定理：过半径的外端并且垂直于半径的直线是圆的切线。

符号语言

$\because OA \perp l$ 于 A , OA 为半径

$\therefore l$ 为 $\odot O$ 的切线



（请务必记住证明切线方法：有交点就连半径证垂直；无交点就做垂直证半径）

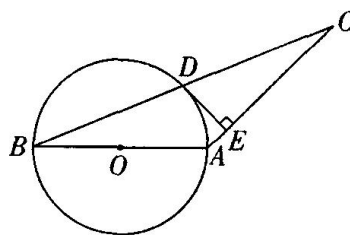
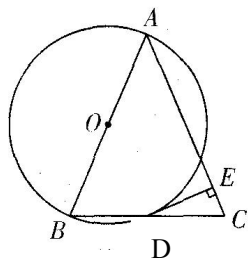
注意：（1）判定定理中的已知条件“经过半径的外端”和“垂直于这条半径”缺一不可。

（2）这个定理是切线最常用的判定方法，常见的辅助线是“连半径”。

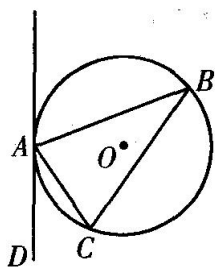
典型例题

考点 1：切线的判定（有交点就连半径证垂直；无交点就做垂直证半径）

例 1 如图，在等腰三角形 ABC 中，以腰 AB 为直径作 $\odot O$ 交底边 BC 于点 D ， $DE \perp AC$ ，垂足为点 E ，试说明 DE 是 $\odot O$ 的切线。



例 2 如图， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ，直线 AD 经过点 A ，且 $\angle CAD = \angle B$ ，判断直线 AD 与 $\odot O$ 的位置关系，并说明理由。



知识点 3: 切线的性质定理

圆的切线垂直于经过切点的半径

推论 1: 经过圆心且垂直于切线的直线必经过切点。

推论 2: 经过切点且垂直于切线的直线必经过圆心。

(请务必记住切线重要用法: 见切线就要连圆心和切点得到垂直)

注意: (1) 切线的性质中: ①半径②垂直③经过切点, 这三个条件只要满足任何两个, 则必须具备另外一个. 其中“半径”也可看做“过圆心的直线”。

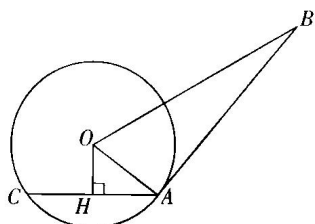
(2) 切线的判定与切线的性质的区别: 切线的判定是在未知相切而要说明相切的情况下运用, 切线的性质是在已知相切而要推出一些其他结论时运用, 两者在运用时不要混淆。

典型例题

考点 1: 利用切线的性质进行计算 (见切点, 连圆心, 得垂直)

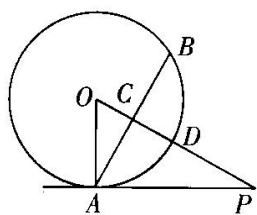
例 1 如图, AB 是 $\odot O$ 的切线, A 为切点, AC 是 $\odot O$ 的弦, 过点 O 作 $OH \perp AC$ 于点 H . 若 $OH=2$, $AB=12$, $BO=13$.

求: (1) $\odot O$ 的半径; (2) AC 的值.



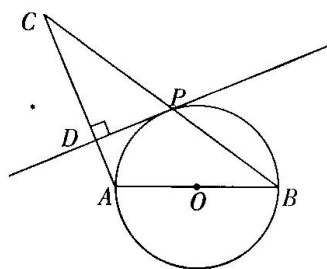
例 2 如图, PA 与 $\odot O$ 相切于 A 点, 弦 $AB \perp OP$, 垂足为 C , OP 与 $\odot O$ 相交于 D 点, 已知 $OA=2$, $OP=4$.

(1) 求 $\angle POA$ 的度数; (2) 计算弦 AB 的长.



例 3 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 以 AB 为直径的 $\odot O$ 交 BC 于点 P , $PD \perp AC$ 于点 D , 且 PD 与 $\odot O$ 相切.

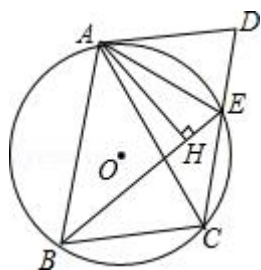
(1) 求证: $AB=AC$; (2) 若 $BC=6$, $AB=4$, 求 CD 的值.



考点 2：切线性质进行证明

例 1 如图，已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形， AD 与 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 恰好相切于点 A ，边 CD 与 $\odot O$ 相交于点 E ，连接 AE ， BE 。

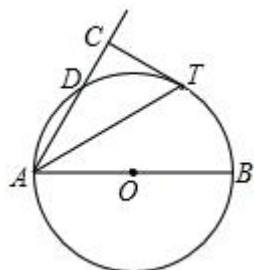
- (1) 求证： $AB=AC$ ；
- (2) 若过点 A 作 $AH \perp BE$ 于 H ，求证： $BH=CE+EH$ 。



考点 3: 切线的判定与性质综合应用

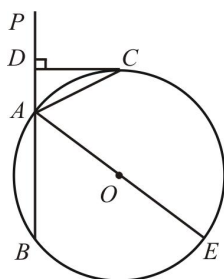
例 1 如图, AB 是 $\odot O$ 直径, D 为 $\odot O$ 上一点, AT 平分 $\angle BAD$ 交 $\odot O$ 于点 T , 过 T 作 AD 的垂线交 AD 的延长线于点 C .

- (1) 求证: CT 为 $\odot O$ 的切线;
- (2) 若 $\odot O$ 半径为 2, $CT = \sqrt{3}$, 求 AD 的长.



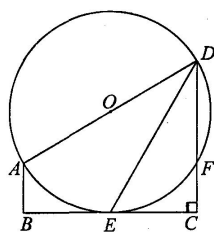
例 2 如图, 已知直线 PA 交 $\odot O$ 于 A, B 两点, AE 是 $\odot O$ 的直径, 点 C 为 $\odot O$ 上一点, 且 AC 平分 $\angle PAE$, 过 C 作 $CD \perp PA$, 垂足为 D .

- (1) 求证: CD 为 $\odot O$ 的切线;
- (2) 若 $DC + DA = 6$, $\odot O$ 的直径为 10, 求 AB 的长度.



例 3 如图, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle C = 90^\circ$, 以 AD 为直径的 $\odot O$ 与 BC 相切于点 E , 交 CD 于点 F , 连接 DE .

- (1) 证明: DE 平分 $\angle ADC$;
- (2) 已知 $AD = 4$, 设 CD 的长为 x ($2 < x < 4$).
 - ① 当 $x = 2.5$ 时, 求弦 DE 的长度;
 - ② 当 x 为何值时, $DF \cdot FC$ 的值最大? 最大值是多少?

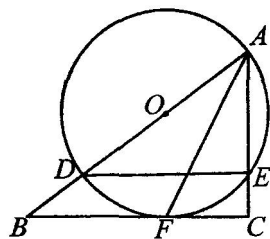


例 4 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ，点 D 是 AB 上一点，以 AD 为直径作 $\odot O$ 交 AC 于 E ，与 BC 相切于点 F ，连接 AF 。

(1) 求证： $\angle BAF = \angle CAF$ ；

(2) 若 $AC=6$ ， $BC=8$ ，求 BD 和 CE 的长。

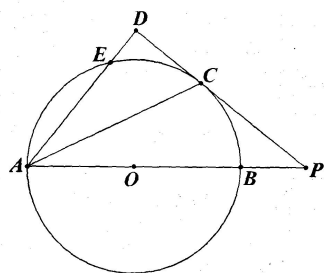
(3) 若 AF 与 DE 交于 H ，求 $FH \cdot FA$ 的值（直接写出结果即可） ▲ 。



例 5 如图， AB 为 $\odot O$ 直径， E 为 $\odot O$ 上一点， $\angle EAB$ 的平分线 AC 交 $\odot O$ 于 C 点，过 C 点作 $CD \perp AE$ 的延长线于 D 点，直线 CD 与射线 AB 交于 P 点。

(1) 求证： DC 为 $\odot O$ 切线；

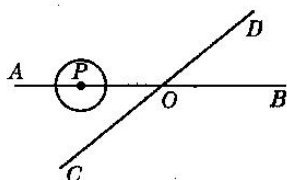
(2) 若 $DC=1$ ， $AC=\sqrt{5}$ ，①求 $\odot O$ 半径长；②求 PB 的长。



能力提优

题型 1: 动点问题

例 1 如图, 直线 AB 、 CD 相交于点 O , $\angle AOC = 30^\circ$, 半径为 1cm 的 $\odot P$ 的圆心在射线 OA 上, 开始时, $PO = 6\text{cm}$, 如果 $\odot P$ 以 1cm/秒 的速度沿由 A 向 B 的方向移动, 那么当 $\odot P$ 的运动时间 t (秒) 满足什么条件时, $\odot P$ 与直线 CD 相交?

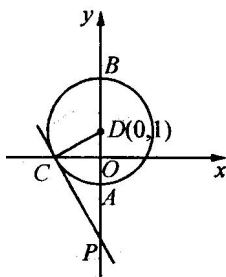


题型 2: 一次函数与圆的位置关系

例 1 如图, 已知 D 点坐标为 $(0, 1)$, $\odot D$ 交 y 轴于 A 、 B 两点, 交 x 轴于点 C , 过点 C 的直线 $y = -2\sqrt{2}x - 8$ 与 y 轴交于点 P .

(1) 试判断 PC 与 $\odot D$ 的位置关系;

(2) 判断在直线 PC 上是否存在点 E , 使 $S_{\triangle COE} = 4S_{\triangle CDO}$, 若存在, 求出点 E 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

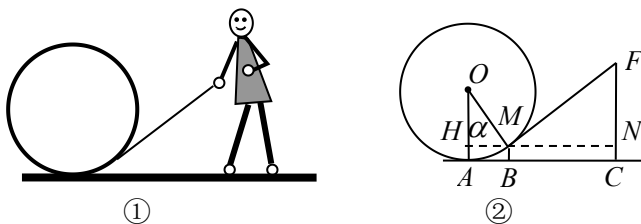


题型 3: 圆与三角函数应用

例 1 如图①②, 图①是一个小朋友玩“滚铁环”的游戏, 铁环是圆形的, 铁环向前滚动时, 铁环钩保持与铁环相切. 将这个抽象为数学问题, 如图②. 已知铁环的半径为 5 个单位 (每个单位为 5cm), 设铁环中心为 O , 铁环钩与铁环相切点为 M , 铁环与地面接触点为 A , $\angle MOA = \alpha$, 且 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$.

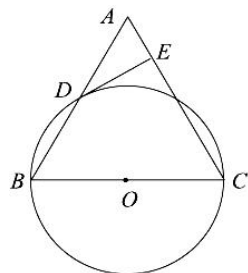
(1) 求点 M 离地面 AC 的高度 BM (单位: 厘米);

(2) 设人站立点 C 与点 A 的水平距离 AC 等于 11 个单位, 求铁环钩 MF 的长度 (单位: 厘米).



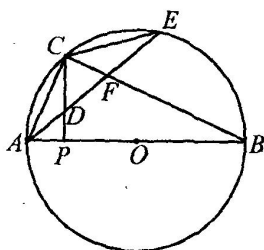
例2 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $BC=AC$ ，以 BC 为直径的 $\odot O$ 与边 AB 相交于点 D ， $DE \perp AC$ ，垂足为点 E 。

- (1)求证：点 D 是 AB 的中点；
- (2)判断 DE 与 $\odot O$ 的位置关系，并证明你的结论；
- (3)若 $\odot O$ 的直径为18， $\cos B = \frac{1}{3}$ ，求 DE 的长。



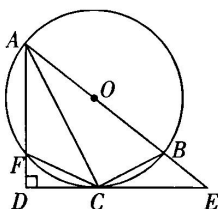
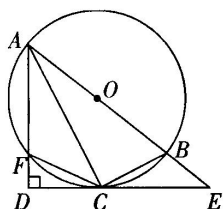
例3 如图， C 为 $\odot O$ 上一点，过点 C 作直径 AB 的垂线 CP ， P 为垂足，弦 AE 分别交 PC 、 CB 于点 D 、 F ， $AD=CD=5$ ， $\odot O$ 的半径为10。

- (1)求证： $\widehat{AC} = \widehat{CE}$ ；
- (2)求 DF 的长；
- (3)求 $\tan \angle ECB$ 。



例4 如图，已知 AB 为 $\odot O$ 的直径，过 $\odot O$ 上的点 C 的切线交 AB 的延长线于点 E ， $AD \perp EC$ 于点 D 且交 $\odot O$ 于点 F ，连接 BC ， CF ， AC 。

- (1)求证： $BC=CF$ ；
- (2)若 $AD=3$ ， $DE=4$ ，求 BE 的长；
- (3)若 $FD=1$ ， $\tan E = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，求 $\odot O$ 的半径。

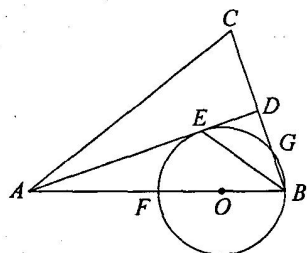


备用图

例 5 (2015 年苏州园区一模) 已知: 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, AD 平分 $\angle BAC$, BE 平分 $\angle ABC$ 交 AD 于点 E . 经过 B 、 E 两点的 $\odot O$ 交 AB 于点 F , 交 BC 于点 G , BF 恰为 $\odot O$ 的直径.

(1) 求证: AD 与 $\odot O$ 相切;

(2) 若 $BC=4$, $\cos C = \frac{1}{3}$, 求 $\odot O$ 的半径长.

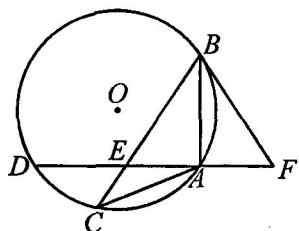


例 6 如图, $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, 且 $AB=AC$, 点 D 在 $\odot O$ 上, $AD \perp AB$ 于点 A , AD 与 BC 交于点 E , F 在 DA 的延长线上, 且 $AF=AE$.

(1) 试判断 BF 与 $\odot O$ 的位置关系, 并说明理由;

(2) 若 $BF=5$, $\cos \angle C = \frac{4}{5}$, 求 $\odot O$ 的直径;

(3) 若 $\cos \angle F = \frac{3}{5}$, 则 $\frac{S_{\triangle ACE}}{S_{\triangle ABE}} = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$. (直接填写结果)

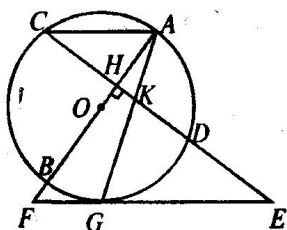


例 7 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 弦 $CD \perp AB$ 于 H , 过 CD 延长线上一点 E 作 $\odot O$ 的切线交 AB 的延长线于 F , 切点为 G , 连接 AG 交 CD 于 K .

(1) 求证: $KE=GE$;

(2) 若 $KG^2 = KD \cdot GE$, 试判断 AC 与 EF 的位置关系, 并说明理由;

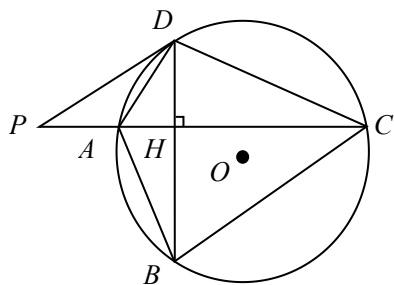
(3) 在 (2) 的条件下, 若 $\tan E = \frac{3}{4}$, $AK = 2\sqrt{5}$, 求 AC 的长.



例 8 如图, $\odot O$ 的半径 $r=25$, 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, $AC \perp BD$ 于点 H , P 为 CA 延长线上一点, 且 $\angle PDA = \angle ABD$.

(1) 试判断 PD 与 $\odot O$ 的位置关系, 并说明理由;

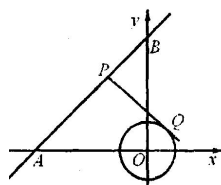
(2) 若 $\tan \angle ADB = \frac{3}{4}$, $PA = \frac{4\sqrt{3}-3}{3} AH$, 求 BD 的长;



题型 4：圆中动点求最值问题

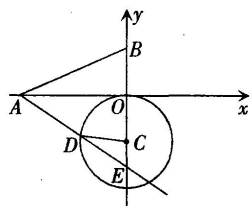
例 1 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 AB 过点 $A(-3\sqrt{2}, 0)$ ， $B(0, 3\sqrt{2})$ ， $\odot O$ 的半径为 1 (O 为坐标原点)，点 P 在直线 AB 上，过点 P 作 $\odot O$ 的一条切线 PQ ， Q 为切点，则切线长 PQ 的最小值为 ()

- A. $\sqrt{7}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 3 D. $\sqrt{10}$

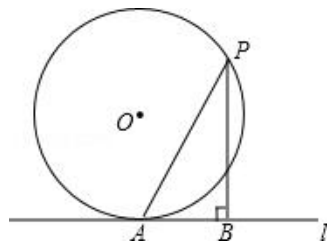


例 2 如图，已知 A 、 B 两点的坐标分别为 $(-4, 0)$ 、 $(0, 2)$ ， $\odot C$ 的圆心坐标为 $(0, -2)$ ，半径为 2. 若 D 是 $\odot C$ 上的一个动点，射线 AD 与 y 轴交于点 E ，当 $\triangle ABE$ 的面积最大值是 ()

- A. 12 B. $\frac{40}{3}$ C. $\frac{44}{3}$ D. 16



例 3 如图，直线 l 与半径为 4 的 $\odot O$ 相切于点 A ， P 是 $\odot O$ 上的一个动点 (不与点 A 重合)，过点 P 作 $PB \perp l$ ，垂足为 B ，连接 PA 。设 $PA=x$ ， $PB=y$ ，则 $(x-y)$ 的最大值是_____。

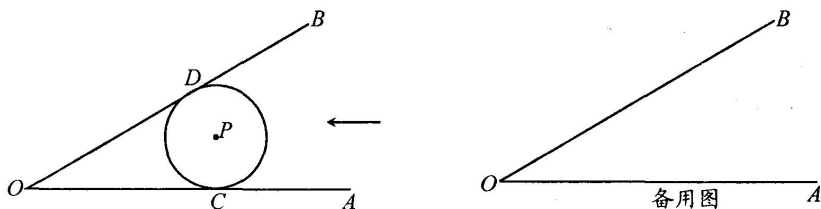


题型 5: 动点问题

例 1 已知 $\angle AOB = 30^\circ$ ，半径为 6cm 的 $\odot P$ 沿边 OA 从右向左平行移动，与边 OA 相切的切点记为点 C.

(1) $\odot P$ 移动到与边 OB 相切时 (如图)，切点为 D，求劣弧 \widehat{CD} 的长:

(2) $\odot P$ 移动到与边 OB 相交于点 E, F, 若 $EF = 4\sqrt{6}$ cm, 求 OC 的长.



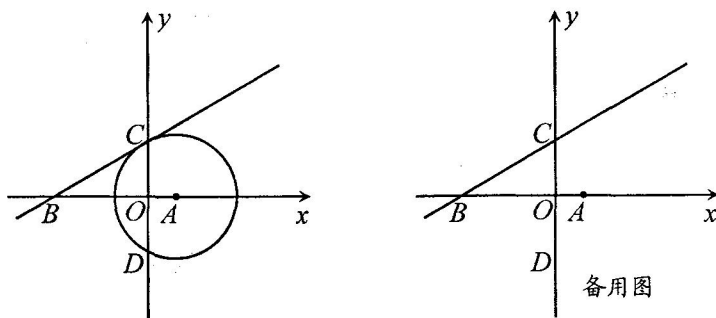
例 2 如图, $\odot A$ 与 y 轴交于 C、D 两点, 圆心 A 的坐标为 (1, 0), 直线 BC: $y = \frac{1}{2}x + 2$ 切

$\odot A$ 于点 C, 交 x 轴于点 B.

(1) $\odot A$ 的半径为 ▲ ;

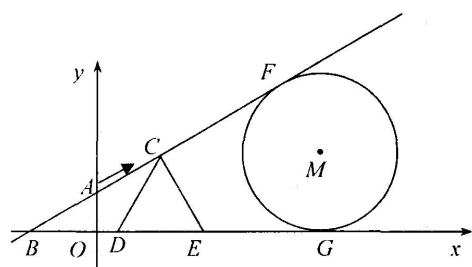
(2) 若点 P 是第一象限内 $\odot A$ 上的一点, 过点 P 作 $\odot A$ 的切线与直线 BC 相交于点 G, 且 $\angle CGP = 120^\circ$, 求点 G 的坐标;

(3) 向左移动 $\odot A$ (圆心 A 始终保持在 x 轴上), 与直线 BC 交于 E、F, 在移动过程中是否存在点 A, 使 $\triangle AEF$ 是直角三角形? 若存在, 求出点 A 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



例3 如图, 直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ 分别与两坐标轴交于 A, B 两点, 点 C 从 A 点出发沿射线 BA 方向移动, 速度为每秒 1 个单位长度. 以 C 为顶点作等边 $\triangle CDE$, 其中点 D 和点 E 都在 x 轴上. 半径为 $3\sqrt{3} - 3$ 的 $\odot M$ 与 x 轴、直线 AB 相切于点 G, F.

- (1) 直线 AB 与 x 轴所夹的角 $\angle ABO = \underline{\quad \blacktriangle \quad}^\circ$;
 (2) 求当点 C 移动多少秒时, 等边 $\triangle CDE$ 的边 CE 与 $\odot M$ 相切?



例4 如图, 已知 $l_1 \perp l_2$, $\odot O$ 与 l_1, l_2 都相切, $\odot O$ 的半径为 2cm, 矩形 ABCD 的边 AD、AB 分别与 l_1, l_2 重合, $AB = 4\sqrt{3}$ cm, $AD = 4$ cm, 若 $\odot O$ 与矩形 ABCD 沿 l_1 同时向右移动, $\odot O$ 的移动速度为 3cm/s, 矩形 ABCD 的移动速度为 4cm/s, 设移动时间为 t (s)

- (1) 如图①, 连接 OA、AC, 则 $\angle OAC$ 的度数为 $\underline{\quad \quad}^\circ$;
 (2) 如图②, 两个图形移动一段时间后, $\odot O$ 到达 $\odot O_1$ 的位置, 矩形 ABCD 到达 $A_1B_1C_1D_1$ 的位置, 此时点 O_1, A_1, C_1 恰好在同一直线上, 求圆心 O 移动的距离 (即 OO_1 的长);
 (3) 在移动过程中, 圆心 O 到矩形对角线 AC 所在直线的距离在不断变化, 设该距离为 d (cm), 当 $d < 2$ 时, 求 t 的取值范围 (解答时可以利用备用图画相关示意图).

