

对称图形——圆专题讲义

2.6 三角形的内切圆

课标知识与能力目标

1. 掌握切线长定理，并能灵活运用定理解决相关问题
2. 了解三角形的内切圆、三角形的内心等概念，会作一个三角形的内切圆

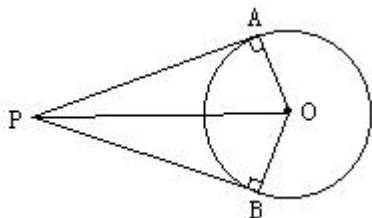
知识点 1：切线长

1. 切线长概念

切线长是在经过圆外一点的圆的切线上，这点和切点之间的线段的长度，“切线长”是切线上一条线段的长，具有数量的特征，而“切线”是一条直线，它不可以度量长度。

2. 切线长定理

对于切线长定理，应明确（1）若已知圆的两条切线相交，则切线长相等；（2）若已知两条切线平行，则圆上两个切点的连线为直径；（3）经过圆外一点引圆的两条切线，连结两个切点可得到一个等腰三角形；（4）经过圆外一点引圆的两条切线，切线的夹角与过切点的两个半径的夹角互补；（5）圆外一点与圆心的连线，平分过这点向圆引的两条切线所夹的角。



（1）定理：过圆外一点所画的圆的两条切线长相等。

注意：（1）切线长不是指切线的长度，而是指圆的切线上一点与切点之间的线段长。

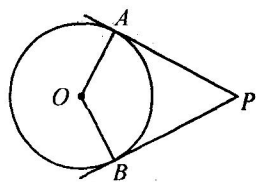
（2）切线长定理的基本图形要熟记，还可推出结论：这点和圆心的连线垂直平分切点弦（切点连成的弦），同时也平分这两条切线的夹角。

典型例题

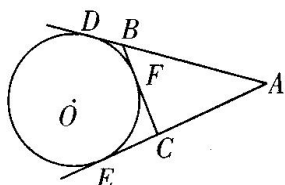
考点 1：利用切线长定理进行相关计算

例 1 如图，PA、PB 是 $\odot O$ 的切线，切点分别是 A、B，如果 $\angle P = 60^\circ$ ，那么 $\angle AOB$ 等于（ ）

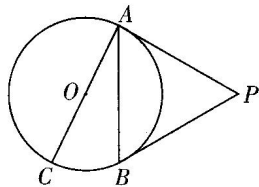
- A. 60° B. 90° C. 120° D. 150°



例 2 如图，AE、AD、BC 分别切 $\odot O$ 于点 E、D、F，若 $AD = 20$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长。



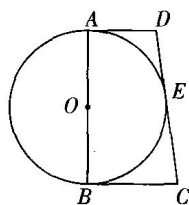
例 3 如图，PA、PB 是 $\odot O$ 的两条切线，切点分别为点 A、B，若直径 AC=12， $\angle P=60^\circ$ ，求弦 AB 的长.



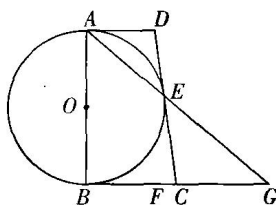
例 4 图①，AB 为 $\odot O$ 的直径，AD 与 $\odot O$ 相切于点 A，DE 与 $\odot O$ 相切于点 E，点 C 为 DE 延长线上一点，且 CE=CB.

(1) 求证：BC 为 $\odot O$ 的切线；

(2) 连接 AE，AE 的延长线与 BC 的延长线交于点 G (如图②所示). 若 $AB=2\sqrt{5}$ ， $AD=2$ ，求线段 BC 和 EG 的长.



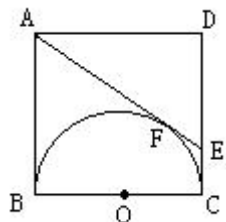
①



②

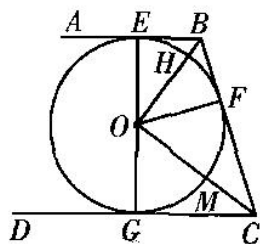
考点 2：切线长定理应用

例1 如图1，正方形 $ABCD$ 的边长为1，以 BC 为直径。在正方形内作半圆 O ，过 A 作半圆切线，切点为 F ，交 CD 于 E ，求 $DE:AE$ 的值。



例 2 如图， AB ， BC ， CD 分别与 $\odot O$ 相切于 E ， F ， G ，且 $AB \parallel CD$ ， $BO=6$ ， $CO=8$ 。

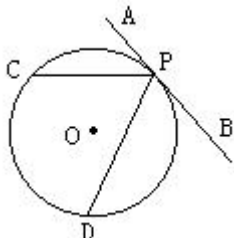
- (1)判断 $\triangle OBC$ 的形状，并证明你的结论；
- (2)求 BC 的长；
- (3)求 $\odot O$ 的半径 OF 的长。



能力提优

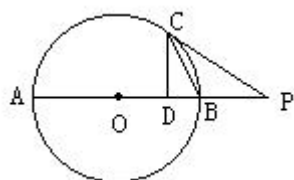
题型1：探究弦切角定理

弦切角：顶点在圆上，一边和圆相交，另一边和圆相切的角。

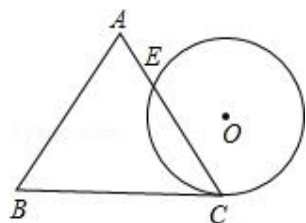


弦切角定理：弦切角等于其所夹的弧所对的圆周角。

例1 如图，已知P为 $\odot O$ 的直径AB延长线上一点，PC切 $\odot O$ 于C， $CD \perp AB$ 于D，求证：CB平分 $\angle DCP$ 。

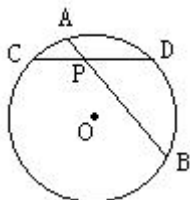


例2 一个边长为4cm的等边三角形ABC与 $\odot O$ 等高，如图放置， $\odot O$ 与BC相切于点C， $\odot O$ 与AC相交于点E，则CE的长为____cm.

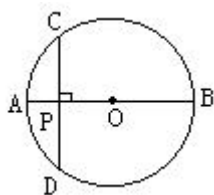


题型2：探究相交弦定理及推论

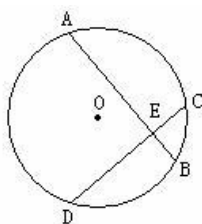
例1 已知 $\odot O$ 中，AB、CD为弦，交于P，求证： $PA \cdot PB = PC \cdot PD$



例2 已知 $\odot O$ 中, AB 为直径, $CD \perp AB$ 于 P , 求证: $PC^2 = PA \cdot PB$.

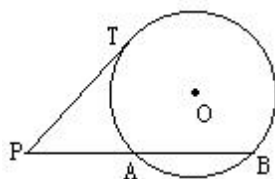


例3 $\odot O$ 中的两条弦 AB 与 CD 相交于 E , 若 $AE = 6\text{cm}$, $BE = 2\text{cm}$, $CD = 7\text{cm}$, 那么 $CE =$ _____ cm 。

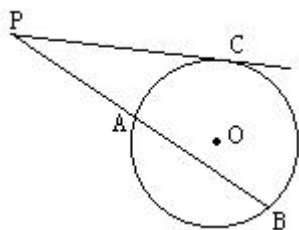


题型 3: 探究切线定理

例 1 已知 $\odot O$ 中, PT 切 $\odot O$ 于 T , 割线 PB 交 $\odot O$ 于 A , 求证: $PT^2 = PA \cdot PB$



例2 如图, P 是 $\odot O$ 外一点, PC 切 $\odot O$ 于点 C , PAB 是 $\odot O$ 的割线, 交 $\odot O$ 于 A 、 B 两点, 如果 $PA : PB = 1 : 4$, $PC = 12\text{cm}$, $\odot O$ 的半径为 10cm , 则圆心 O 到 AB 的距离是 _____ cm 。

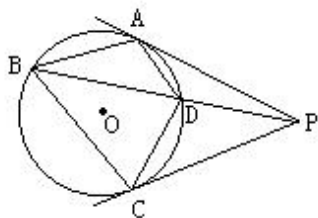


题型 4：探究割线定理

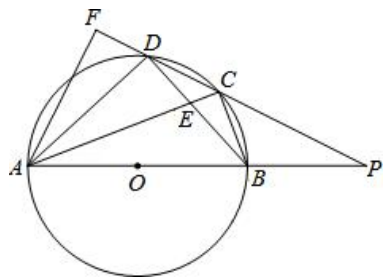
例 1 已知 PB、PD 为 $\odot O$ 的两条割线，交 $\odot O$ 于 A、C，求证：PA · PB = PC · PD

例 2 若 PA 为 $\odot O$ 的切线，A 为切点，PBC 割线交 $\odot O$ 于 B、C，若 BC = 20， $PA = 10\sqrt{3}$ ，则 PC 的长为_____。

例 3 如图，PA、PC 切 $\odot O$ 于 A、C，PDB 为割线。求证：AD · BC = CD · AB

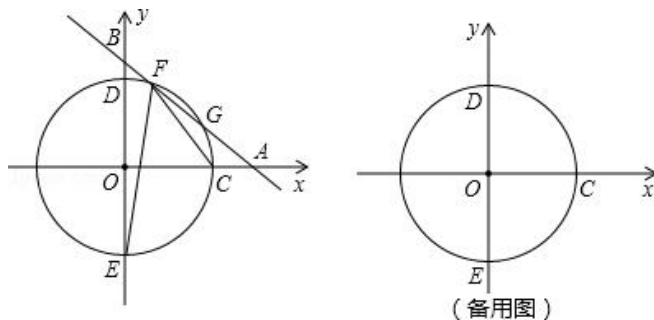


例 4 (2014·泸州) 如图，四边形 ABCD 内接于 $\odot O$ ，AB 是 $\odot O$ 的直径，AC 和 BD 相交于点 E，且 $DC^2 = CE \cdot CA$ 。分别延长 AB、DC 交于点 P，过点 A 作 $AF \perp CD$ 交 CD 的延长线于点 F，若 $PB = OB$ ， $CD = 2\sqrt{2}$ ，求 DF 的长。



题型 5：圆的综合题

例 1 (2014•泰州) 如图，平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y = -\frac{3}{4}x + b$ (b 为常数， $b > 0$) 的图象与 x 轴、 y 轴分别相交于点 A 、 B ，半径为 4 的 $\odot O$ 与 x 轴正半轴相交于点 C ，与 y 轴相交于点 D 、 E ，点 D 在点 E 上方。



(1) 若直线 AB 与 \widehat{CD} 有两个交点 F 、 G 。

①求 $\angle CFE$ 的度数；②用含 b 的代数式表示 FG^2 ，并直接写出 b 的取值范围；

(2) 设 $b \geq 5$ ，在线段 AB 上是否存在点 P ，使 $\angle CPE = 45^\circ$ ？若存在，请求出 P 点坐标；若不存在，请说明理由。

例 2 (2013 年苏州高新区一模) 如图，在平面直角坐标系中，点 D 为 y 轴上一点， $\odot D$ 与坐标轴分别相交于 $A(-\sqrt{3}, 0)$ 、 $C(0, 3)$ 及 B 、 F 四点。 E 为优弧 AB 上一动点 (不与 A 、 B 、 C 三点重合)， M 为半径 DE 的中点。

(1) 求 $\odot D$ 的半径；

(2) 连接 MO ，若 $\angle MOD = \alpha^\circ$ ，弧 CE 的长为 y ，求 y 与 α 之间的函数关系式；

(3) 过点 E 作 $EN \perp x$ 轴于点 N ，连接 MN ，当 $\angle DMN = 45^\circ$ 时，求 $\angle MNE$ 的度数，并说明以 DE 为直径的 $\odot M$ 与直线 DN 的位置关系。

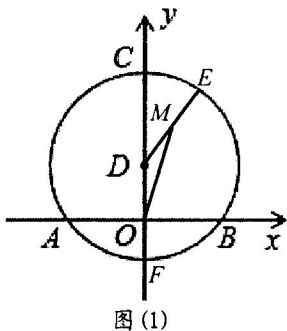


图 (1)

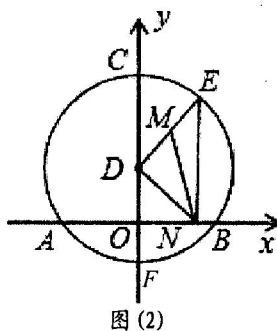


图 (2)

知识点 2: 三角形的内切圆

与三角形各边都相切的圆叫做三角形的内切圆, 内切圆的圆心叫做三角形的内心, 这个三角形叫做圆的外切三角形.

注意: (1) 三角形的内切圆只有一个, 圆的外切三角形有无数个.

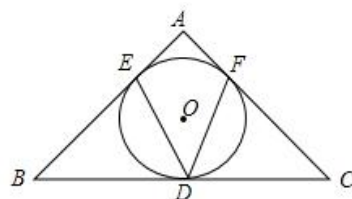
(2) 三角形的内心是三角形角平分线的交点.

(3) 三角形的内心到三角形三边的距离相等.

典型例题

考点 1: 利用三角形内切圆性质求角度

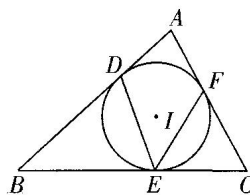
例 1 如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆, 切点分别是 D 、 E 、 F , $\angle B=60^\circ$, $\angle C=70^\circ$, 求 $\angle EDF$ 的度数.



(变式题)

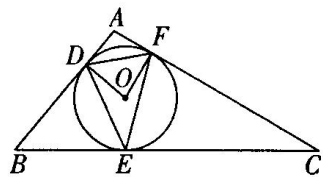
1. 如图, $\odot I$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆, 切点分别为点 D 、 E 、 F , 若 $\angle DEF=52^\circ$, 则 $\angle A$ 的度为 ()

- A. 76° B. 68°
C. 52° D. 38°



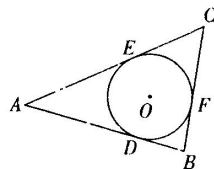
2. 如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆, 切点分别是 D 、 E 、 F , 已知 $\angle A=100^\circ$, $\angle C=30^\circ$, 则 $\angle DFE$ 的度数为 ()

- A. 55° B. 60° C. 65° D. 70°

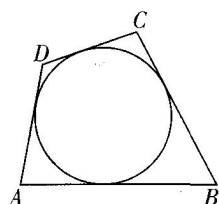


考点 2: 求圆的外切三角形的周长

例 1 如图, $\triangle ABC$ 内切于 $\odot O$, 切点分别为 D 、 E 、 F . 若 $AE=4$, $CE=2$, $BF=1$, 则 $\triangle ABC$ 的周长为_____.

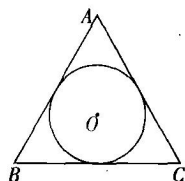


例 2 如图, 一圆内切于四边形 $ABCD$, 且 $AB=16$, $CD=10$, 求四边形 $ABCD$ 的周长.



考点 3: 等边三角形内切圆性质求半径

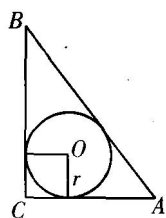
例 1 如图, 已知 $\odot O$ 是边长为 2 的等边 $\triangle ABC$ 的内切圆, 则 $\odot O$ 的面积为_____.



例 2 等边三角形的内切圆半径为 r , 外接圆半径为 R , 高为 h , 则 $r: R: h=$ _____

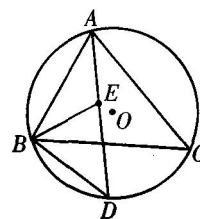
考点 4: 直角三角形内切圆性质

例 1 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=6$, $BC=8$. 则 $\triangle ABC$ 的内切圆半径 $r=$ _____.



考点 4: 三角形内切圆的判定

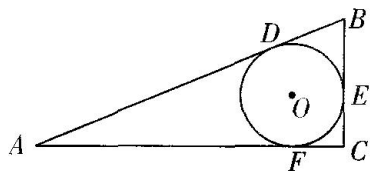
例 1 如图, $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, D 是 \widehat{BC} 的中点, 点 E 在 AD 上, 且 $DE=DB$, 那么点 E 是 $\triangle ABC$ 的内心吗? 为什么?



能力提优

题型：直角三角形内切圆性质应用

例 1 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$, $BC=5$ ， $\odot O$ 内切于 $\triangle ABC$ 的三边，切点分别为 D 、 E 、 F ，半径 $r=2$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长.



例 2 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AC=8$ ， $AB=10$ ，点 P 在 AC 上， $AP=2$ ，若 $\odot O$ 的圆心在线段 BP 上，且 $\odot O$ 与 AB 、 AC 都相切，切点分别为 E 、 F ，则 $\odot O$ 的半径是多少？

