

第二十届华罗庚金杯少年数学邀请赛

决赛试题参考答案（初一组）

一、填空（每题 10 分，共 80 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	114686	210	5,7	4	673	$76\frac{3}{4}, 10\frac{1}{2}$	135	34,16

二、解答下列各题（每题 10 分，共 40 分，要求写出简要过程）

9. 答案：0

解答：由于

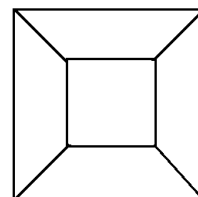
$$\begin{aligned}
 & 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 2013 + 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2014 \\
 &= 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 2013 + (2015 - 2013)(2015 - 2011)(2015 - 2009) \times \cdots \times (2015 - 1) \\
 &= 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 2013 + (-2013)(-2011)(-2009) \times \cdots \times (-1) + 2015 \times n \\
 &= 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 2013 \times [1 + (-1)^{1007}] + 2015 \times n \\
 &= 2015 \times n
 \end{aligned}$$

其中 n 为某整数，算式 $1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 2013 + 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2014$ 的值被 2015 整除后的余数为 0.

10. 答案：（1）6，（2）4

解答：（1）共含有 6 个四边形；

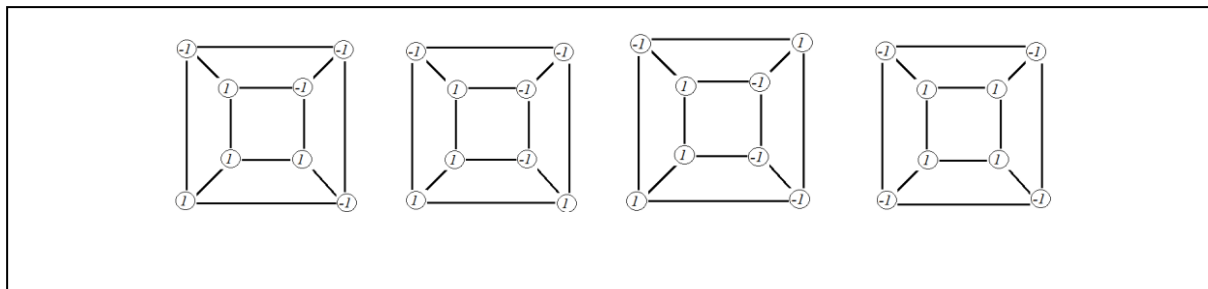
（2）至多有 4 个不同的和，分别是 6，2，-2 和 -6



称四边形 4 个顶点的积为“顶点积”，8 个顶点处所标的数记为 $x_i (i=1,2,3,4,5,6,7,8)$ ，其中有 4 个 1，4 个 -1，称四边形 4 个顶点的积为“顶点积”，只能是 1 或 -1. 将 6 个“顶点积”相乘，得： $(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8)^3 = 1$ ，说明 6 个“顶点积”中，积为 -1 的个数是偶数，可能的个数是 0, 2, 4 和 6，则 6 个“顶点积”的不同的和至多有 4 个，分别是 -6，-2，2 和 6.

能否有 4 个不同的和？下图是 6 个“顶点积”的和分别是 -6，-2，2 和 6，其顶点处 1 和 -1 的放

法.



11. 答案: 288

解答: 由题意知:

$$\begin{aligned} & b^2|c| - 2c^2|b| - 4(|b| - 2|c|) \\ &= |b||bc| - |bc||2c| - 4(|b| - 2|c|) \\ &= |bc|(|b| - |2c|) - 4(|b| - 2|c|) \\ &= (|bc| - 4)(|b| - 2|c|) \\ &= 0. \end{aligned}$$

因为 b 与 c 同号, 且 $b \neq 2c$, 故 $bc = 4$. 由 $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a} = \frac{3}{4}$, 得

$$ac + ab - bc = \frac{3}{4}abc = 3a. \quad (1)$$

由 $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} = \frac{3}{2}$, 得

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3}{2}abc = 6a. \quad (2)$$

因为

$$(a - (b + c))^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2a(b + c) + 2bc \geq 0. \quad (3)$$

由 (1), (2), (3), 得

$$a = b + c.$$

由 $a^2 + b^2 + c^2 = 6(b + c)$, 得到:

$$2(b + c)^2 - 2bc = 6(b + c),$$

即:

$$2(b + c)^2 - 8 - 6(b + c) = 0, \quad (b + c)^2 - 3(b + c) - 4 = 0,$$

由此得

$$\begin{cases} b+c=4 \Rightarrow b=c=2. \\ b+c=-1 \Rightarrow \text{无解}. \end{cases}$$

于是 $a=4$. 故 $a^4+b^4+c^4=288$.

12. 答案: (1) 可以 (2) 900毫米长14根,745毫米长10根,1385毫米长2根.

解答: (1) 根据题目要求, 如果可以从三种木方各选出一些根, 锯出十个玩具的所需木方并且不能剩余各种长度的木方, 则最后锯出的木方的长度只能是 260 毫米与 370 毫米, 并且数量分别是 30 根与 40 根. 根据说明, “一个木方被锯一次要得到两个长度大于 0 的木方”, 则一个木方被切割的次数是等于锯出的木方的数目-1. 设一根木方的长度为 L , 锯出长度为 260 毫米与 370 毫米木方分别为 n, m 根, 则有关系式: $260n + 370m + 5(m + n - 1) = L$ (*)

针对三种木方有下面锯的方法并且只有这三种锯的方法:

$$900 = 260 \times 2 + 370 + (2 + 1 - 1) \times 5,$$

$$745 = 370 \times 2 + 5 \times (2 - 1)$$

$$1385 = 260 + 370 \times 3 + 5 \times (3 + 1 - 1)$$

设用长度为 900 毫米、750 毫米、1385 毫米的标准木方分别是 x 根、 y 根、 z 根.

由于所以,

$$\begin{cases} 2x + z = 30 \cdots \cdots (1) \\ x + 2y + 3z = 40 \cdots \cdots (2) \end{cases}$$

(2) $\times 2 -$ (1):

$$4y + 5z = 50$$

$$\therefore z = \frac{50 - 4y}{5} = 10 - \frac{4y}{5}$$

解得三组整数解:

$$(1) \begin{cases} x = 10 \\ y = 0 \\ z = 10 \end{cases}, (2) \begin{cases} x = 12 \\ y = 5 \\ z = 6 \end{cases}, (3) \begin{cases} x = 14 \\ y = 10 \\ z = 2 \end{cases}$$

因此问题可以从三种木方各选出一些根, 锯出十个玩具的所需木方并且不能剩余各种长度的木方。

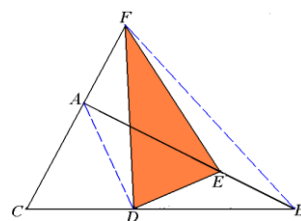
(2) 考虑到锯的次数最少, 因为只有这三种解, 分别计算: 解(1) 锯了 50 次, 解(2) 锯了 47 次, 解(3) 锯了 44 次, 最小者为解(3), 此时 $x=14, y=10, z=2$.

三、解答下列各题 (每小题 15 分, 共 30 分, 要求写出详细过程)

13. 答案: $\triangle ABC$ 的面积是 2015.

解答: 如图所示, 连接 BF, AD . 设 $\triangle ABC$ 面积 $=x$.

因为 $CA:AF=4:3$, 所以 $\triangle FBA$ 面积 $=\frac{3}{4}x$, $\triangle FBC$ 面积 $=x+\frac{3}{4}x=\frac{7}{4}x$.



由此和 $CD:DB=2:3$, 可知:

$$\triangle FBD \text{ 面积} = \frac{7}{4}x \times \frac{3}{5} = \frac{21}{20}x.$$

又由 $AE:EB=2:1$,

$$\triangle FBE \text{ 面积} = \frac{3}{4}x \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}x.$$

再由 $AE:EB=2:1$ 和 $CD:DB=2:3$,

$$\triangle BED \text{ 面积} = \triangle ABD \text{ 面积} \times \frac{1}{3} = \triangle ABC \text{ 面积} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}x.$$

因此, $\triangle FBD$ 面积 $-\triangle FBE$ 面积 $-\triangle BED$ 面积 $=\triangle DEF$ 的面积, 可得:

$$\frac{21}{20}x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{5}x = 1209,$$

解上述方程, $\frac{3}{5}x = 1209, x = 2015$.

14. 答案: 0, 6

解答: 首先 $n=0$ 时, $n^2+2^n=1$ 为完全平方数.

当 $n>0$ 时, 记 $n^2+2^n=b^2$, b 为正整数, 则

$$2^n = b^2 - n^2 = (b+n)(b-n).$$

令

$$b+n=2^s, \quad b-n=2^t, \quad s>t\geq 0, \quad s+t=n. \quad \textcircled{1}$$

其中 s, t 是非负整数, 则

$$2n = 2^s - 2^t = 2 \times 2^{s-1} - 2^t = 2^{s-1} + 2^{s-1} - 2^t \geq 2^{s-1}, \quad n > 2^{s-2}.$$

根据 $s > t$, $s + t = n$, 则 $2s > n$,

$$s > 2^{s-3}.$$

这个不等式只有在 $s = 1, 2, 3, 4, 5$ 时成立.

由①得

$$s + t = 2^{s-1} - 2^{t-1}. \quad \text{②}$$

若 $s = 1$, 由②得 $-t = 2^{t-1}$. 因为 $-t \leq 0, 2^{t-1} > 0$, 所以没有 t 使得②成立.

若 $s = 2$, 由②得 $-t = 2^{t-1}$. 因为 $-t \leq 0, 2^{t-1} > 0$, 所以没有 t 使得②成立.

若 $s = 3$, 由②得 $1 - t = 2^{t-1}$. 整数 t 只能取 $0, 1, 2$, 都不能使得②成立.

当 $s = 4$ 时, 由②得 $4 - t = 2^{t-1}$. 整数 t 只能取 $0, 1, 2, 3$, 只有 t 为 2 时②成立.

此时, $n = 6, b = 10$.

若 $s = 5$, 由②得 $11 - t = 2^{t-1}$. 因为 2^{t-1} 为偶数, 所以 t 只能取奇数 $1, 3$, 均不能使得 ②成立

所以, 使得 $n^2 + 2^n$ 为完全平方数的 n 的值为 0 和 6 .