

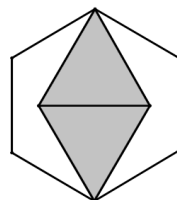
## 第二十届华罗庚金杯少年数学邀请赛

### 决赛试题（初一组）

（时间：2015 年 4 月 11 日 10:00~11:30）

#### 一、选择题（每小题 10 分，共 80 分）

1. 计算： $2048 \times \left( 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 3\frac{1}{8} + \cdots + 10\frac{1}{1024} \right) =$ \_\_\_\_\_.
2. 一堆彩球只有红、黄两色. 先数出的 50 个球中有 49 个红球, 此后, 每数出 8 个球中都有 7 个红球, 恰好数完. 已数出的球中红球不少于 90%. 这堆彩球最多有\_\_\_\_\_个.
3. 正整数  $a, b, c, d$  满足  $\frac{2}{3} < \frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{3}{4}$ , 当  $a+b+c+d$  最小时,  $c =$ \_\_\_\_\_,  $d =$ \_\_\_\_\_.
4. 圆形跑道上等距插着 2015 面旗子, 甲与乙同时同向从某面旗子的位置出发, 当甲与乙再次同时回到出发点时, 甲跑了 23 圈, 乙跑了 13 圈. 不算起始点旗子位置, 则中间有\_\_\_\_\_次甲正好在旗子位置追上乙.
5. 现有 2015 张卡片, 每张上写有数字 +1 或 -1. 如果每次指着其中的三张卡片问: “这三张卡片所写的数字的乘积是多少?” 并得到正确回答. 那么, 至少问\_\_\_\_\_次才能确定这 2015 张卡片所写的数字的乘积.
6. 设  $a, b, c$  为 1 到 9 中的三个不同整数, 则  $\frac{\overline{abc}}{a+b+c}$  的最大值是\_\_\_\_\_, 最小值是\_\_\_\_\_. ( $\overline{abc}$  是个三位数)
7. 如右图, 正六边形中两个等边三角形的面积都为 30 平方厘米, 那么正六边形的面积是\_\_\_\_\_平方厘米.

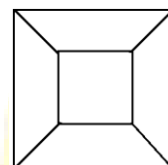


8. 从一副扑克牌中抽走一些牌, 在剩下的牌中至少要数出 20 张, 才能确保数出的牌中有两张同花色的牌的点数和为 15. 那么最多抽走\_\_\_\_\_张牌, 最少抽走\_\_\_\_\_张牌. (J、Q、K 的点数分别为 11, 12, 13, 大、小王的点数为 0; 一副扑克牌有 54 张牌, 其中 52 张是正牌, 另 2 张是副牌 (大王和小王). 52 张正牌又均分为 13 张一组, 并以黑桃、红桃、草花、方块四种花色表示各组, 每组花色的牌包括从 1 至 10 (1 通常表示为 A) 以及 J、Q、K 标示的 13 张牌).

## 二、解答下列各题 (每小题 10 分, 共 40 分, 要求写出简要过程)

9. 算式  $1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 2013 + 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2014$  的值被 2015 除的余数为多少?

10. (1) 右图共含有几个四边形? (2) 在右图的每个顶点处标上 1 或 -1, 共有 4 个 1 和 4 个 -1, 将每个四边形 4 个顶点处的数相乘, 再将所得的所有的积相加, 问: 至多有多少个不同的和?

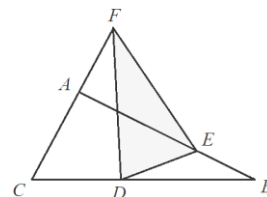


11. 已知  $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a} = \frac{3}{4}$ ,  $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} = \frac{3}{2}$ ,  $b^2|c| - 2c^2|b| - 4(|b| - 2|c|) = 0$ ,  $b$  与  $c$  同号, 且  $b \neq 2c$ . 求  $a^4 + b^4 + c^4$ .

12. 加工十个同样的木制玩具, 需用 260 毫米和 370 毫米长的标准木方分别为 30 根和 40 根. 仓库里有长度分别为 900 毫米、745 毫米、1385 毫米的三种标准木方, 用这三种标准木方锯出所需长度的木方, 每锯一次要损耗 5 毫米长木方. 问是否可以用三种木方, 每种木方选一些, 恰好锯出十个玩具所需的木方? 如果可以, 要求锯的次数最少, 那么三种木方各选多少根? (说明: 一根木方被锯一次要得到两个长度大于 0 的木方, 即不能从一端锯.)

## 三、解答下列各题 (每小题 15 分, 共 30 分, 要求写出详细过程)

13. 如图,  $\triangle ABC$  中,  $D$  是  $BC$  上一点且  $CD : DB = 2 : 3$ ,  $E$  是  $AB$  上一点且  $AE : EB = 2 : 1$ ,  $F$  是  $CA$  的延长线上一点且  $CA : AF = 4 : 3$ . 若  $\triangle DFE$  的面积为 1209, 求  $\triangle ABC$  的面积.



14. 求使得  $n^2 + 2^n$  为完全平方数的自然数  $n$ .