

第二讲：跨越----从算术到代数

【知识纵横】

“算术”可以理解为“计算的方法”，而“代数”可以理解为“以符号替代数字”，即“数学符号化”，著名数学教育家波利亚曾说：“代数是一种不用词句而只用符号所构成的语言。”

用字母表示数是数学发展史上的一件大事，是由算术跨越到代数的桥梁，是人类发展史上的一个飞跃，也是代数与算术的最显著的区别。

字母表示数使得数学具有简洁的语言，能更普遍地说明数量关系，在列代数式、求代数式的值、形成公式等方面有广泛的应用。

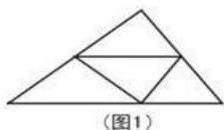
【例题求解】

例1. (1) 观察下列等式

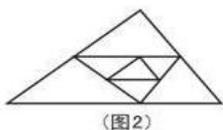
$$\begin{aligned} 9-1 &= 8, \\ 16-4 &= 12, \\ 25-9 &= 16, \\ 36-16 &= 20, \end{aligned}$$

这些等式反映出自然数间的某种规律，设 n 表示自然数，用关于 n 的等式表示出来：_____.

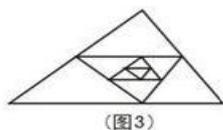
(2) 如图，在图①中，互不重叠的三角形共有4个，在图②中，互不重叠的三角形共有7个，在图③中，互不重叠的三角形共有10个，.....，则在第 n 个图形中，互不重叠的三角形共有_____个（用含有 n 的代数式表示）。



(图1)



(图2)



(图3)

(重庆市中考题)

思路点拨：(1) 在观察给定的等式基础上，寻找数字特点、等式的共同特征，发现一般规律；(2) 从三角形个数规律或图形生成特点入手。

例2. 某商品原价为 a 元，春节促销，降价 20%，如果节后恢复到原价，则应将现售价提高 ()
 A. 15% B. 20% C. 25% D. 30%

(四川省竞赛题)

思路点拨 设应提价 $x\%$ ，建立关于 x 的方程。

例3. (1) 计算：

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2005}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2004}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2005}\right) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2004}\right)$$

(2) 设 $A = \frac{1^2+2^2}{1 \times 2} + \frac{2^2+3^2}{2 \times 3} + \frac{3^2+4^2}{3 \times 4} + \dots + \frac{1003^2+1004^2}{1003 \times 1004} + \frac{1004^2+1005^2}{1004 \times 1005}$ 求 A 的整数部分。

(北京市竞赛题)

思路点拨：对于 (1)，直接计算复杂而繁难，注意括号内数式的联系，引入字母，将复杂的数值计算转化为简单的式的计算；对于 (2)，从分析 A 中第 n 项 $\frac{n^2+(n+1)^2}{n \times (n+1)}$ 的特征入手。

例4. 有这样的两位数，交换该数数码所得到的两位数与原数的和是一个完全平方数，例如，29 就是这样的两位数，因此 $29+92=121=11^2$ ，请你找出所有这样的两位数。(第十九届江苏省竞赛题)

思路点拨：设原数为 \overline{ab} ，则新数为 \overline{ba} ，发现 $\overline{ab} + \overline{ba}$ 的特点是解本例的关键。

例5. 现有 a 根长度相同的火柴棒，按如图①摆放时可摆成 m 个正方形，按如图②摆放可摆成 $2n$ 个正方形。

(1) 用含 n 的代数式表示 m ；

(2) 当这 a 根火柴棒还能摆成如图③所示的形状时，求 a 的最小值。(浙江省竞赛题)



图1

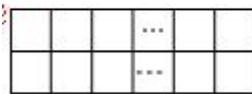


图2

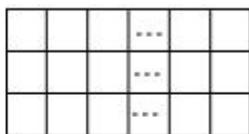


图3

例6. 如图①，有9个方格，要求在每个方格里填入不同的数，使得每行、每列、每条对角线上三个数之和都相等。问：图上左上角的数是多少？（北京市“迎春杯”竞赛题）

?		
		19
	13	

※巩固训练※

1. 如果 a 是一个三位数，现在把1放在它的右边得到一个四位数，这个四位数是（ ）

- A. $1000a+1$ B. $100a+1$ C. $10a+1$ D. $a+1$

（重庆市中考题）

2. 某商场经销一批电视机，进价为每台 a 元，原零售价比进价高 $m\%$ ，后根据市场变化，把零售价调整为原零售价的 $n\%$ ，调整后的零售价为每台（ ）元。

- A. $a(1+m\% \cdot n\%)$ B. $a(1+m\%)n\%$ C. $a(1+m\%)(1-n\%)$ D. $a \cdot m\%(1-n\%)$

（广东省竞赛题）

3. 已知 n 是整数，现有两个代数式：(1) $2n+3$ ，(2) $4n-1$ ，其中，能表示“任意奇数”的（ ）

- A. 只有 (1) B. 只有 (2) C. 有 (1) 和 (2) D. 一个也没有

4. 扑克牌游戏：小明背对小亮，让小亮按下列四个步骤操作：

第一步：分发左、中、右三堆牌，没堆牌不少于两张，且各堆牌的张数相同；

第二步：从左边一堆拿出两张，放入中间一堆；

第三步：从右边一堆拿出一张，放入中间一堆；

第四步：左边一堆有几张牌，就从中间一堆拿几张牌放入左边一堆。

这时，小明准确说出了中间一堆牌现有的张数，你认为中间一堆牌的张数是多少？

（河北省中考题）

5. 有一张纸，第一次把它分割成4片，第2次把其中的一片分割成4片，以后每一次都把前面所得的其中一片分割成4片，如此进行下去，试问：

- (1) 把5次分割后，共得到多少张纸片？
- (2) 经 n 次分割后，共得到多少张纸片？
- (3) 能否经若干次分割后共得到2003张纸片？为什么？

（第十七届江苏省竞赛题）

12. 老师报出一个五位数，同学们将它的顺序倒排后得到的五位数减去原数，学生甲、乙、丙、丁的结果分别是 34567、34056、23456、34956，老师判定四个结果中只有一个正确，答对的是（ ）。

A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

(第16届“五羊杯”竞赛题)

13. 某工厂3月份的产值比2月份增加10%，四月份的产值比3月份减少10%，则（ ）。

- A. 4月份的产值与2月份相等 B. 4月份的产值比2月份增加 $\frac{1}{99}$
- B. C. 4月份的产值比2月份减少 $\frac{1}{99}$ D. 4月份的产值比2月份增加 $\frac{1}{100}$

(“希望杯”邀请赛试题)

14. 如图是一个3×3的幻方，当空格中填上适当的数后，每行、没列以及对角线上的数的和都是相同的，求k的值。

	k	
		11
121		

15. 一条公交线路从起点到终点有8个站，一辆公交车从起点站出发，前6站上车100人，前7站下车80人，问从前6站上车而在终点下车的乘客有多少人？（“希望杯”邀请赛试题）

16. 将1~16这16个整数填入4×4的正方形表格中，使得每行、每列、每条对角线上四个数之和都相等，如右图所示，恰有8个小方格中填的数被一个淘气的小朋友擦掉了，请你将擦掉的这8个数设法恢复出来。

20. 有四个互不相同的正整数，从中任取两个数组成一组，并在同一组中用较大的数减去较小的数，再将各组所得的差相加，其和恰好等于18。若这四个数的乘积是23100求这四个数。

(天津市竞赛题)

		14	4
12			9
8	10		
	3	2	