第五讲 解读绝对值

【知识纵横】

绝对值是初中代数中的一个基本概念，是学习相反数、有理数运算及后续算术根的基础。绝对值又是初中代数中的一个重要概念，在解代数式化简求值、解方程（组）、解不等式（组）等问题中有着广泛的应用，全面理解、掌握绝对值这一概念，应该从以下方面入手：

$$1. \text{去绝对值的符号法则: } |a| = \begin{cases} a & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

2. 绝对值的基本性质

$$\textcircled{1} \text{非负性: } |a| \geq 0; \textcircled{2} |ab| = |a||b|; \textcircled{3} \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} (b \neq 0); \textcircled{4} |a|^2 = |a^2| = a^2$$

$$\textcircled{5} |a+b| \leq |a|+|b|; \textcircled{6} ||a|-|b|| \leq |a-b| \leq |a|+|b|$$

3. 绝对值的几何意义

从数轴上看， $|a|$ 表示 a 的点到原点的距离（长度，非负）； $|a-b|$ 表示数 a 、数 b 的两点间的距离。

【例题求解】

例1 (1) 已知 $|x|=5, |y|=1$ ，那么 $||x-y|-|x+y|| = \underline{\hspace{2cm}}$ （北京市“迎春杯”竞赛题）

(2) 非零整数 m, n 满足 $|m|+|n|-5=0$ ，所以这样的整数 (m, n) 共有 $\underline{\hspace{2cm}}$

（首届江苏省数学基础闯关题）

思路点拨 (1) 既可以对 x, y 的取值进行分类分解，又可以利用绝对值的几何意义解；(2) 从把5拆分成两个正整数的和入手。

例2. 如果 a, b, c 是非零有理数，且 $a+b+c=0$ ，那么 $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|}$ 的所有可能值为（ ）

A.0 B.1 或-1 C.2 或-2 D.0 或-2

（山东省竞赛题）

思路点拨 根据 a, b 的符号所有可能情况，脱去绝对值符号，这是解本题的关键。

例 3. 已知 $|ab-2|$ 与 $|b-1|$ 互为相反数，试求代数式

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{(a+1)(b+1)} + \frac{1}{(a+2)(b+2)} + \cdots + \frac{1}{(a+2002)(b+2002)}$$
 的值

思路点拨：运用相反数、绝对值、非负数的概念与性质，先求出 a 、 b 的值

例 4. 化简

$$(1) |2x-1|$$

$$(2) |x-1| + |x-3|$$

思路点拨：(1) 就 $2x-1 \geq 0, 2x-1 < 0$ 两种情形去掉绝对值符号；(2) 将零点 1, 3 (使 $x-1=0, 3-x=0$ 的值) 在同一数轴上表示出来，就 $x < 1, 1 \leq x \leq 3, x \geq 3$ 三种情况进行讨论

例 5. (“希望杯”试题) 已知 $(|x+1| + |x-2|)(|y-2| + |y+1|)(|z-3| + |z+1|) = 36$ ，求 $x+2y+3z$ 最大值和最小值

思路点拨：解本例的关键是利用绝对值的几何意义确定括号内每个式子的取值范围

例 6. (四川省竞赛题) 设 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 是六个不同的正整数，取值于 1, 2, 3, 4, 5, 6，记

$$S = |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |x_3 - x_4| + |x_4 - x_5| + |x_5 - x_6| + |x_6 - x_1|$$
，求 S 得最小值

思路点拨：实验调整或建立相应模型求解

13. 当 $|x-2|+|x-3|$ 的值最小时， $|x-2|+|x-3|-|x-1|$ 的最大值是_____，最小值是_____。
(希望杯邀请赛试题)

14. 已知正整数 a、b 满足 $|b-2|+b-2=0, |a-b|+a-b=0$, 且 $a \neq 0$, 则 ab 的值是_____。
(2011 年四川省竞赛题)

15. 设 a、b、c 是不为零的有理数，那么 $x = \frac{a}{|a|} + \frac{|b|}{b} - \frac{c}{|c|}$ 的值有 () ("希望杯"邀请赛试题)

- A.3 种 B.4 种 C.5 种 D.6 种

16. 当满足 () 时，

$|1.5x-0.5|+|2.5x-0.5|+|3.5x-0.5|+|4.5x-0.5|+|5.5x-0.5|+|6.5x-0.5|$ 的值取最小。

- A. $\frac{1}{11} \leq X \leq \frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{9} \leq X \leq \frac{1}{7}$ C. $\frac{1}{7} \leq X \leq \frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{13} \leq X \leq \frac{1}{11}$

(“五羊杯”竞赛题)

17. 如果 $0 < p < 15$, 那么代数式 $|x-p|+|x-15|+|x-p-15|$ 在 $p \leq x \leq 15$ 的最小值是 ()。

- A.30 B.0 C.15 D. 一个与 P 有关的代数式

18. 若 $x < -2$, 则 $y = |1 - |1 + x||$ 等于 ()。

- A.2+x B.-2-x C.x D.-x

19. 有理数 a、b、c 均不为 0, 且 $a+b+c=0$, 设 $x = \left| \frac{|a|}{b+c} + \frac{|b|}{c+a} + \frac{|c|}{a+b} \right|$, 试求代数式 $x^{19} - 99x + 2002$ 的值。

20. 若 a、b、c 为整数, 且 $|a-b|^{19} + |c-a|^{99} = 1$, 求 $|c-a|+|a-b|+|b-c|$ 的值。

21. 已知 a、b、c、d 是有理数, $|a-b| \leq 9, |c-d| \leq 16$, 且 $|a-b-c+d| = 25$ 求 $|b-a|-|d-c|$ 的值。(希望杯邀请赛试题)

22. 在数轴上把坐标为 1,2,3,⋯, 2006 的点称为标点, 一只青蛙从点 1 出发, 经过 20062 次跳动, 且回到出发点, 那么该青蛙所跳过的全部路径的最大值是多少? 说明理由。(山东省竞赛题)