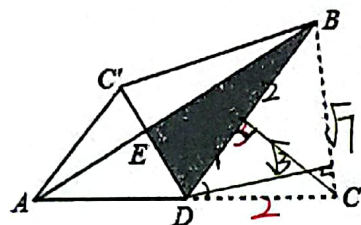


2022 春季数学压轴每日一练 (一)

2021 年江草桥二模

1. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 AC 边上的中点, 连接 BD , 把 $\triangle BDC$ 沿 BD 翻折, 得到 $\triangle BDC'$, DC' 与 AB 交于点 E , 连接 AC' , 若 $AD=AC'=2$, $BD=3$, 则点 D 到 BC' 的距离为 (B)



A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{3\sqrt{21}}{7}$

C. $\sqrt{7}$

D. $\sqrt{13}$

翻折 \rightarrow 全等

要求 D 到 BC' 即到 BC .

中点 + 折叠 $\rightarrow AD=CD=DC'$

$AD=AC' \Rightarrow \triangle ADC'$ 是等边

$AD=AC'$

$\rightarrow \angle BDC=60^\circ$

在 $\triangle BDC$ 中 $DC=2, BD=3$.

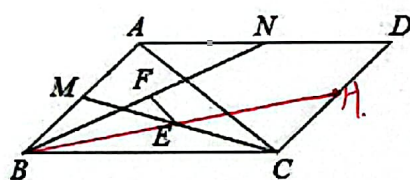
$\angle BDC=60^\circ$. 求 D 到 BC 距离?

① 作垂直 ② 用面积

$h = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{21}}{7}$

2. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC=45^\circ$, $AB=6\sqrt{2}$, $CB=14$. 点 M, N 分别是边 AB, AD 的中点,

连接 CM, BN , 并取 CM, BN 的中点, 分别记为点 E, F , 连接 EF , 则 EF 的长为 $\frac{5}{2}$.



诸多中点

\rightarrow 联想中位线

连 BE 并延长交 DC 于 H.

易得 H 是中点, E 是 BH 中点.

如何? E 是 BH 中点

$EF = \frac{1}{2} NH \Rightarrow EF = \frac{1}{4} AC$

$NH = \frac{1}{2} AC$

AC 如何求?

$AB=6\sqrt{2}, BC=14, \angle ABC=45^\circ$

求 AC. 作垂直 $AC=10$

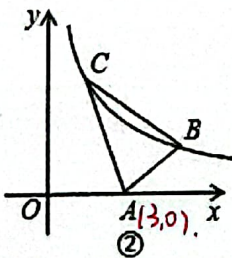
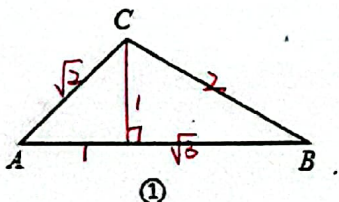
3. 有一边是另一边的 $\sqrt{2}$ 倍的三角形叫做智慧三角形, 这两边中较长边称为智慧边, 这两边的夹角叫做智慧角.

智慧角.

- (1) 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, 若 $\angle A$ 为智慧角, 则 $\angle B$ 的度数为 45° ;

- (2) 如图①, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=45^\circ, \angle B=30^\circ$, 求证: $\triangle ABC$ 是智慧三角形;

- (3) 如图②, $\triangle ABC$ 是智慧三角形, BC 为智慧边, $\angle B$ 为智慧角, $A(3, 0)$, 点 B, C 在函数 $y=\frac{k}{x}$ ($x>0$) 的图象上, 点 C 在点 B 的上方, 且点 B 的纵坐标为 $\sqrt{2}$. 当 $\triangle ABC$ 是直角三角形时, 求 k 的值.



(3) ① $\angle ABC=90^\circ$

$\therefore B$ 为智慧角, BC 为智慧边

$\therefore BC=\sqrt{2}AB$

见直角 \rightarrow 造 "K" 型相似

$B(3+m, \sqrt{2})$

$C(1+m, \sqrt{2}+\sqrt{2}m)$

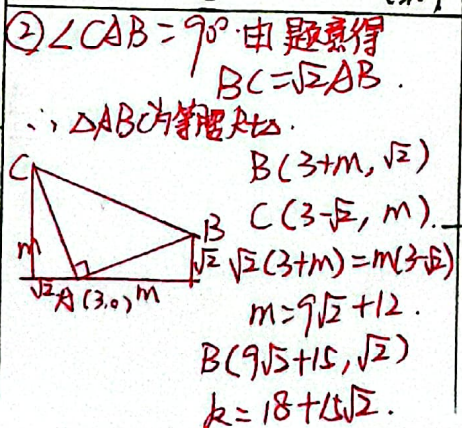
$(3+m)\sqrt{2} = (1+m) \cdot \sqrt{2}(1+m)$

$m^2+2m+1-m-3=0 \rightarrow (m+2)(m-1)=0$

$m_1=-2, m_2=1. B(4, \sqrt{2}) k=4\sqrt{2}$

③ $\angle ACB=90^\circ$ 由题意可知不存在.

综上 $k=18+15\sqrt{2}$ 或 $4\sqrt{2}$.



② $\angle CAB=90^\circ$ 由题意得

$BC=\sqrt{2}AB$

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰直角.

$B(3+m, \sqrt{2})$

$C(3-\sqrt{2}, m)$

$\sqrt{2}\sqrt{(3+m)^2 + 2} = m\sqrt{2}$

$m=9\sqrt{2}+12$

$B(9\sqrt{2}+15, \sqrt{2})$

$k=18+15\sqrt{2}$

(2) $\angle A=45^\circ, \angle B=30^\circ$

$AC=\sqrt{2}, BC=2, AB=\sqrt{3}$

$\therefore BC=\sqrt{2}AC$

$\therefore \triangle ABC$ 为智慧三角形

4. 如图1, 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过点 $A(-1, 0)$ 点 $B(3, 0)$ 和点 $C(0, 2)$, 连接 AC .

线段 AB 上有一动点 P , 过点 P 作 AC 的平行线交直线 BC 于点 D , 交抛物线于点 E .

(1) 求二次函数的解析式; $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2$

(2) 移动点 P , 求线段 DE 的最大值;

(3) 如图2, 过点 E 作 y 轴的平行线 EF 交 BC 于点 F , 连接 PC , 若以点 C, D, P 为顶点的三角形和 $\triangle EFD$ 是相似三角形, 求此时点 P 坐标.

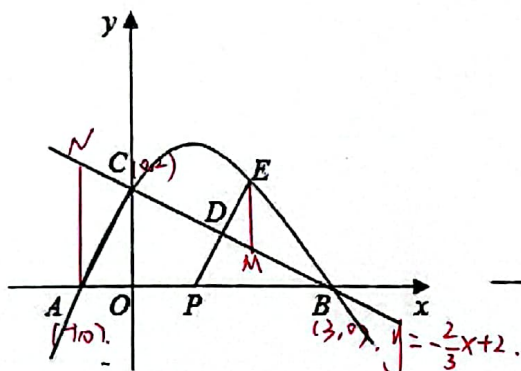


图1

(2) $DE \parallel AC$

\hookrightarrow 斜化直
 \hookrightarrow 构造相似.

易证 $\triangle ACN \sim \triangle EDM$

$$\frac{DE}{AC} = \frac{EM}{AN} = \frac{8}{15}$$

$$DE = \frac{8}{15} \sqrt{5} EM$$

即 EM 最大时 DE 最大.

EM 何时最大?

$$E(m, -\frac{2}{3}m^2 + \frac{4}{3}m + 2)$$

$$M(m, -\frac{2}{3}m + 2)$$

$$EM = -\frac{2}{3}m^2 + 2m = -\frac{2}{3}(m - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{2}$$

当 $m = \frac{3}{2}$ 时, EM 最大为 $\frac{3}{2}$.

$$\therefore (DE)_{\max} = \frac{8}{15} \sqrt{5} \times \frac{3}{2} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

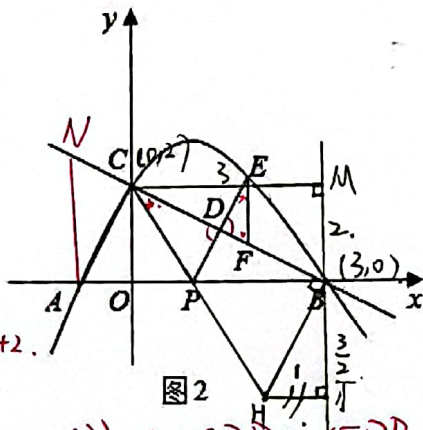


图2

(3) $\because \angle CDP = \angle EDP$

\therefore 当 $\angle PCD = \angle FED$ 时, $\triangle CDP \sim \triangle FED$.

此时 $PC \parallel EF$.

$\therefore P$ 与 O 重合. $\therefore P(0, 0)$.

当 $\angle DEF = \angle PCD$ 时, $\triangle CDP \sim \triangle FED$.

由(2)得 $\angle DEF = \angle NAC$

故 $\angle PCD = \angle NAC$.

$$\therefore \tan \angle NAC = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \tan \angle PCD = \frac{1}{2}$$

角度处理 聚焦 \rightarrow 转化为直角三角形 \rightarrow "1-2" 型相似 \hookrightarrow 直角顶点未知

过 B 作 $BH \perp BC$ 交 CP 延长线于点 H .

易证 $\triangle CMB \sim \triangle BTH$. 相似比 $2=1$.

$$\therefore H(2, -\frac{3}{2}) \quad \therefore CH: y = -\frac{7}{4}x + 2$$

$$P(\frac{7}{8}, 0)$$

综上 $P(0, 0)$ 或 $(\frac{7}{8}, 0)$.