

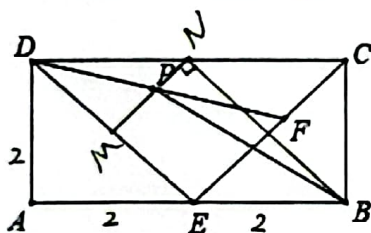
# 2022 春季数学压轴每日一练 (二)

2021 吴中三区一校

1. 对于一个函数, 自变量  $x$  取  $c$  时, 函数值  $y$  等于 0, 则称  $c$  为这个函数的零点. 若关于  $x$  的二次函数  $y = -x^2 - 10x + m$  ( $m \neq 0$ ) 有两个不相等的零点  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ), 关于  $x$  的方程  $x^2 + 10x - m - 2 = 0$  有两个不相等的非零实数根  $x_3, x_4$  ( $x_3 < x_4$ ), 则下列关系式一定正确的是 (D)

- A.  $\frac{x_2}{x_4} > 1$       B.  $0 < \frac{x_2}{x_4} < 1$       C.  $\frac{x_1}{x_3} > 1$       D.  $0 < \frac{x_1}{x_3} < 1$

2. 如图, 矩形  $ABCD$  中,  $AB=4$ ,  $AD=2$ ,  $E$  为  $AB$  的中点,  $F$  为  $EC$  上一动点,  $P$  为  $DF$  中点, 连接  $PB$ , 则  $PB$  的最小值是  $2\sqrt{2}$ .



$PB$  最小值.

点  $P$  的轨迹  $\triangle DEC$  的中位线

$PB$  最小即  $B$  向  $MN$  作垂线, 则垂落在  $N$  处.

$$(PB)_{\min} = 2\sqrt{2}.$$

2021 吴中三区二校

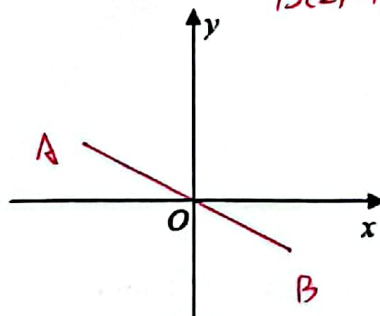
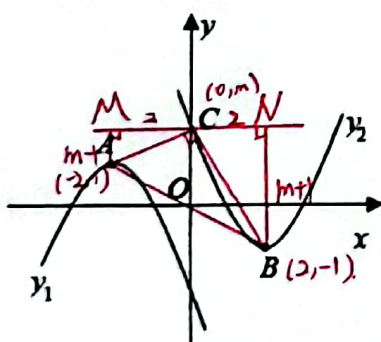
3. 定义: 如果二次函数  $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$  ( $a_1 \neq 0$ ,  $a_1, b_1, c_1$  是常数) 与  $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$  ( $a_2 \neq 0$ ,  $a_2, b_2, c_2$  是常数) 满足  $a_1 + a_2 = 0$ ,  $b_1 = b_2$ ,  $c_1 + c_2 = 0$ , 则这两个函数互为“ $N$ ”函数. 中心对称.

- (1) 写出  $y = -x^2 + x - 1$  的“ $N$ ”函数的表达式;  $a = 1, b = 1, c = 1$ .  
 $\therefore y = x^2 + x + 1$ .

- (2) 若题 (1) 中的两个“ $N$ ”函数与正比例函数  $y = kx$  ( $k \neq 0$ ) 的图象只有两个交点, 求  $k$  的值;

- (3) 如图, 二次函数  $y_1$  与  $y_2$  互为“ $N$ ”函数,  $A, B$  分别是“ $N$ ”函数  $y_1$  与  $y_2$  图象的顶点,  $C$  是“ $N$ ”函数  $y_2$  与  $y$  轴正半轴的交点, 连接  $AB, AC, BC$ , 若点  $A(-2, 1)$  且  $\triangle ABC$  为直角三角形, 求点  $C$  的坐标.

$B(2, -1)$ . 则  $\triangle ABC$  为直角三角形 存在此问题.



备用图  
 $\therefore \Delta = 0$ , 即  $(k-1)^2 - 4 = 0$   
 $k_1 = -1, k_2 = 3$   
 $\therefore k = -1$  或  $k = 3$ .

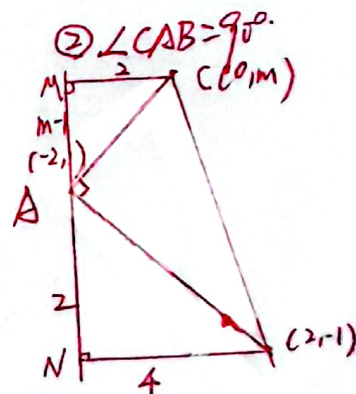
(3) ①  $\angle ACB = 90^\circ$ .

$$\frac{m+1}{2} = \frac{2}{m-1}$$

$$m^2 - 1 = 4$$

$$m = \pm\sqrt{5}$$

$$\therefore C(0, \sqrt{5})$$



$$\frac{2}{m-1} = \frac{21}{42} \rightarrow m-1 = 4$$

$$m = 5$$

$\therefore C(0, 5)$   
 ③  $\angle ABC = 90^\circ$ .  
 则  $C$  在  $y$  轴负半轴. 故舍去.  
 综上:  $C(0, \sqrt{5}), (0, 5)$

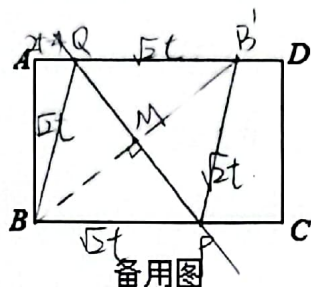
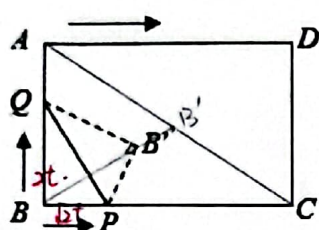
(2)  $\begin{cases} y = -x^2 + x - 1 \\ y = kx \end{cases} \rightarrow -x^2 + x - 1 = kx$   
 $x^2 + (k-1)x + 1 = 0$   
 $\Delta_1 = (k-1)^2 - 4$   
 $\begin{cases} y = x^2 + x + 1 \\ y = kx \end{cases} \rightarrow x^2 + x + 1 = kx$   
 $x^2 + (1-k)x + 1 = 0$   
 $\Delta_2 = (1-k)^2 - 4$   
 $\therefore \Delta_1 = \Delta_2$   
 设  $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2$   
 若  $\Delta > 0$ , 则“ $N$ ”函数与  $y = kx$  有四个交点.  
 若  $\Delta = 0$ , 则“ $N$ ”函数与  $y = kx$  有两个交点.  
 若  $\Delta < 0$ , 则“ $N$ ”函数与  $y = kx$  无交点.

4. 如图, 在矩形  $ABCD$  中,  $AB=4$ ,  $BC=4\sqrt{2}$ . 点  $P$  从点  $B$  出发沿  $BC$  方向运动, 运动速度为每秒  $\sqrt{2}$  个单位长度, 点  $Q$  从点  $B$  同时出发, 沿  $B-A-D$  方向运动, 运动速度为每秒 2 个单位长度, 当  $P$  到达点  $C$  时, 两动点同时停止运动. 设运动时间为  $t$  s, 将矩形沿  $PQ$  所在直线翻折,  $B'$  是翻折后点  $B$  的对应点.

(1) 当  $t=1$  时,  $PQ = \sqrt{6}$ ;  $BQ=2$ ,  $BP=\sqrt{2}$ .

(2) 连接  $AC$ , 若点  $B'$  正好落在线段  $AC$  上, 求  $t$  的值;

(3) 点  $B'$  能否落在  $AD$  所在直线上, 若能, 求出  $AB'$  的长度; 若不能, 请说明理由.



(2) 方法一:  $B'$  (直角) 落在  $AC$  上.  
一线三直角.

方法二: 连接  $BB'$ .

$\because$  翻折.

$\therefore PQ \perp BB'$ .

$\because BP = \sqrt{2}t$ ,  $BQ = 2t$ .

$\therefore \tan \angle BQP = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\tan \angle BPQ = \sqrt{2}$ ,  $BP = \sqrt{2}t$ .

又  $\because PQ \perp BB'$

$\therefore \tan \angle ABB' = \sqrt{2}$

$\because AB=4$ ,  $BC=4\sqrt{2}$ .

$\therefore \tan \angle BAC = \sqrt{2}$ ,  $AC = 4\sqrt{3}$

$\therefore \angle ABB' = \angle BAC$ ,  $AB' = BB'$

故  $B'$  与  $AC$  的交点在  $BB'$  线上.

$\because \angle ABC = 90^\circ$ ,  $AB' = BB'$

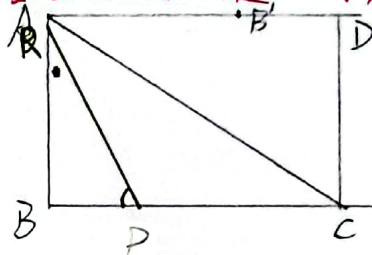
确定  $B'$  位置:  $AB' = B'C$  (直角三角形斜边中线等于斜边一半的性质)

此时

$\therefore BB' = \frac{1}{2}AC = 2\sqrt{3}$

$\frac{\sqrt{2}}{3}t = 2\sqrt{3}$ ,  $t = \frac{3}{2}$

(3) ① 当  $Q$  在  $AB$  上运动时,



$\tan \angle BQP = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$

$\therefore \angle BQP < 45^\circ$

$\therefore \angle BQB' < 90^\circ$ .

$\therefore$  此时  $B'$  不能落在  $AD$  边上.

② 当  $Q$  在  $AD$  上运动时

如备用图)

$\because$  折叠  $\therefore BB' \perp PQ$ ,  $BM = B'M$ ,  $BQ = B'Q$

$\triangle BMP \cong \triangle B'MQ$ .

$\therefore BP = B'Q$ ,  $\therefore BQ = BP = \sqrt{2}t$ .

亦可证明

在  $\triangle ABQ$  中  $4 + (2t - 4)^2 = (\sqrt{2}t)^2$

$t = 4$

$\therefore 2t > 4$ , 且  $t \leq 4$ ,  $\therefore 2 < t \leq 4$ .

$\therefore t = 4$  符合题意

$\therefore B'$  能落在  $AD$  所在直线上.

此时  $AB' = 4 + 4\sqrt{2}$ .