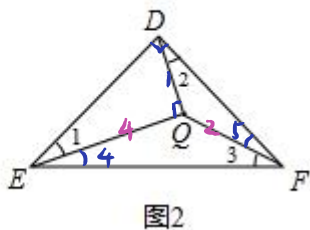
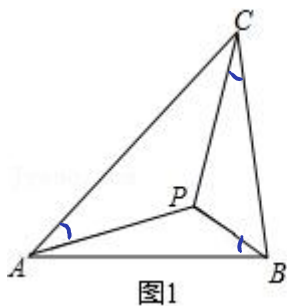


2022 春季数学压轴每日一练（十）

2021 梁丰 3 月月考

1. 如图 1, 若 $\triangle ABC$ 内一点 P 满足 $\angle PAC = \angle PBA = \angle PCB$, 则点 P 为 $\triangle ABC$ 的布洛卡点. 三角形的布洛卡点是法国数学家和数学教育家克洛尔于 1816 年首次发现, 但他的发现并未被当时的人们所注意, 1875 年, 布洛卡点被一个数学爱好者法国军官布洛卡重新发现, 并用他的名字命名. 问题: 已知在等腰直角三角形 DEF 中, 如图 2, $\angle EDF = 90^\circ$, 若点 Q 为 $\triangle DEF$ 的布洛卡点, $DQ = 1$, 则 $EQ + FQ =$ (D)

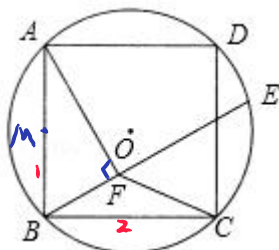


$$\begin{aligned} \angle DQE &= 90^\circ \\ \triangle DQF &\sim \triangle FQE \\ \frac{DQ}{FQ} &= \frac{FQ}{QE} = \frac{DF}{EF} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$\angle 3 + \angle 4 = \angle 1 + \angle 4 = 45^\circ$
 $\angle 3 + \angle 5 = 45^\circ$
 $\rightarrow \angle 4 = \angle 5$

- A. 5 B. 4 C. $3 + \sqrt{2}$ D. $2 + \sqrt{2}$

2. 如图, $\odot O$ 半径为 $\sqrt{2}$, 正方形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, 点 E 在 \widehat{ADC} 上运动, 连接 BE , 作 $AF \perp BE$, 垂足为 F , 连接 CF . 则 CF 长的最小值为 $\sqrt{5} - 1$.



F 点的轨迹?
 $AF \perp BE$ (定长定角)
 找圆心
 圆心 (AB 中点)
 半径 $\frac{1}{2}AB = 1$

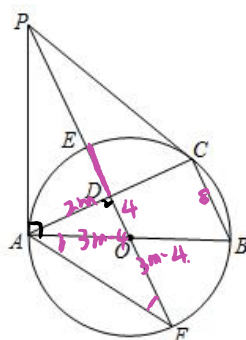
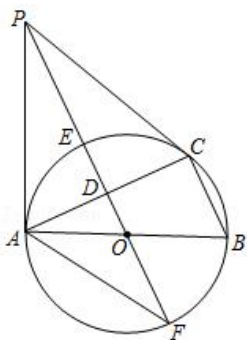
$$\therefore (CF)_{\min} = CM - 1$$

3. 如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, AB 是直径, D 是 AC 中点, 直线 OD 与 $\odot O$ 相交于 E, F 两点, P 是 $\odot O$ 外一点, P 在直线 OD 上, 连接 PA, PC, AF , 且满足 $\angle PCA = \angle ABC$.

(1) 求证: PA 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 证明: $EF^2 = 4OD \cdot OP$;

(3) 若 $BC = 8$, $\tan \angle AFP = \frac{2}{3}$, 求 DE 的长.



(2) 射影或母子相似 $\rightarrow OD \cdot OP = AO^2$
 转化 $\rightarrow EF^2 = 4AO^2$
 $\rightarrow EF = 2AO$

(1) 证明: $\because D$ 为弦 AC 中点,
 $\therefore OD \perp AC$
 $\therefore PD$ 是 AC 的中垂线,
 $\therefore PA = PC$
 $\therefore \angle PAC = \angle PCA$
 $\because AB$ 是直径
 $\therefore \angle ACB = 90^\circ$
 $\therefore \angle CAB + \angle CBA = 90^\circ$
 又 $\angle PCA = \angle ABC$
 $\therefore \angle PCA + \angle CAB = 90^\circ$
 $\therefore \angle CAB + \angle PAC = 90^\circ$
 即 $AB \perp PA$
 $\therefore PA$ 是 $\odot O$ 的切线.
 (2) 证明: 由 (1) 知 $\angle ODA = \angle OAP = 90^\circ$
 $\therefore Rt\triangle AOD \sim Rt\triangle POA$
 $\therefore \frac{AO}{PO} = \frac{OD}{AO}$
 $\therefore AO^2 = OP \cdot OD$
 又 $AO = \frac{1}{2}EF$
 $\therefore \frac{1}{4}EF^2 = OP \cdot OD$, 即 $EF^2 = 4OP \cdot OD$

(3) 中位线 $\rightarrow OD = 4$

求 DE 即求 r .

$$\tan \angle AFP = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow AD = 2m, DF = 3m$$

$$r = OF = AO = 3m - 4$$

$$4m^2 + 16 = (3m - 4)^2$$

(3) 解:

在 $Rt\triangle ADF$ 中, 设 $AD = 2m$,

$$DF = 3m.$$

$$OD = \frac{1}{2}BC = 4.$$

$$AO = OE = OF = 3m - 4$$

$$\therefore OD^2 + AD^2 = AO^2$$

$$\therefore 4m^2 + 16 = (3m - 4)^2$$

$$\text{解得: } m = \frac{24}{5}$$

$$\therefore DE = \frac{32}{5}$$

4. 如图, 抛物线 $y = ax^2 - 2ax + c$ 的图象经过点 $C(0, -2)$, 顶点 D 的坐标为 $(1, -\frac{8}{3})$, 与 x 轴交于 A 、 B 两点.

(1) 求抛物线的解析式. $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 2$

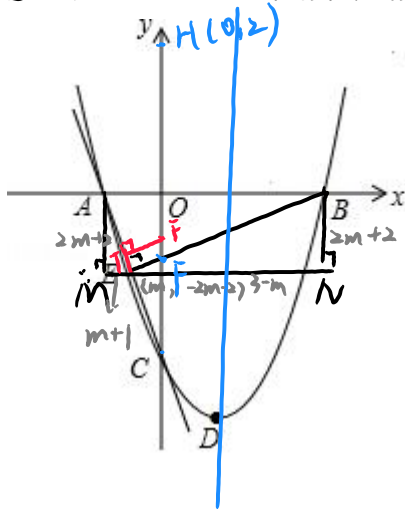
(2) 连接 AC , E 为直线 AC 上一点, 当 $\triangle AOC \sim \triangle AEB$ 时, 求点 E 的坐标和 $\frac{AE}{AB}$ 的值.

对应好了. $\angle AEB = 90^\circ$

(3) 在 (2) 的条件下, 点 $F(0, y)$ 是 y 轴上一动点, 当 $\frac{\sqrt{5}}{5}FC + BF$ 的值最小时, 求 y 为何值时, 并求出这个最小值.

胡不归 重点转化 $\frac{\sqrt{5}}{5}FC$

(4) 点 C 关于 x 轴的对称点为 H , 当 $\frac{\sqrt{5}}{5}FC + BF$ 取最小值时, 在抛物线的对称轴上是否存在点 Q , 使 $\triangle QHF$ 是直角三角形? 若存在, 请求出点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



(2) 如图, 令 $y = 0$.

则 $x_1 = -1, x_2 = 3$

$\therefore A(-1, 0), B(3, 0)$

$\therefore AB = 4, \angle AOC = 90^\circ$

$\therefore \triangle AOC \sim \triangle AEB$

$\therefore \angle AEB = 90^\circ$

$\therefore A(-1, 0), C(0, -2)$

$\therefore AC: y = -2x - 2, AC = \sqrt{5}$

设 $E(m, -2m-2)$

过点 E 作 $EM \perp x$ 轴, 过 A 作 $AM \perp EM$.

过 B 作 $BN \perp EM$.

易证 $\triangle AME \sim \triangle ENB$

$(2m+2)^2 = (m+1)(3-m)$

解得 $m_1 = -1, m_2 = -\frac{1}{5}$

$\therefore E(-\frac{1}{5}, -\frac{8}{5})$

由 $\triangle AOC \sim \triangle AEB$

得 $\frac{AE}{EB} = \frac{AO}{AC} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

(3) 过点 F 作 $FT \perp AC$.

$TF = \frac{\sqrt{5}}{5}FC$

则 $\frac{\sqrt{5}}{5}FC + BF = BF + TF$

三点共线时最小.

此时 $BF + TF = BE$.

$F(0, -\frac{3}{2})$ 时.

$\frac{\sqrt{5}}{5}FC + BF$ 有最小值为 $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

(4) $H(0, 2), F(0, -\frac{3}{2})$

则 $Q(1, \frac{1+\sqrt{3}}{4})$ 或

$Q(1, \frac{1-\sqrt{3}}{4})$ 或

$Q(1, 2)$ 或

$Q(1, -\frac{3}{2})$

直角三角形存在性问题.

分三类讨论. 作一线三直角

过程(略).