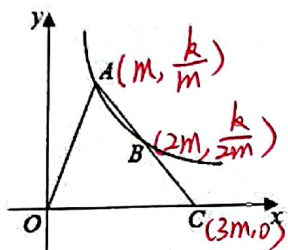


2022 春季数学压轴每日一练 (十二)

2021 宿迁中考

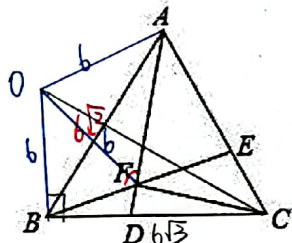
18. 如图, 点 A 、 B 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象上, 延长 AB 交 x 轴于 C 点, 若 $\triangle AOC$ 的面积是 12, 且点 B 是 AC 的中点, 则 $k =$ 8.



$$\begin{aligned} S_{\triangle AOC} &= \frac{1}{2} \cdot OC \cdot y_A \\ &= \frac{1}{2} \times 3m \times \frac{k}{m} \\ &= \frac{3}{2}k = 12 \\ k &= 8 \end{aligned}$$

2021 高新区一模

18. 如图, 在边长为 $6\sqrt{3}$ 的等边 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、点 E 分别是边 BC 、 AC 上的点, 且 $BD = CE$, 连接 BE 、 AD , 相交于点 F . 连接 CF , 则 CF 的最小值为 6.



$$\begin{aligned} BD &= CE \\ \downarrow \\ \triangle ABD &\cong \triangle BCE \\ \downarrow \\ \angle AFE &= 60^\circ \\ \text{定点定长} & \rightarrow \text{F点运动轨迹} \\ &\rightarrow \text{以O为圆心, 6为半径的圆.} \\ (FC)_{\min} &= OC - 6 \\ &= 6 \end{aligned}$$

27. 定义: 若一个三角形存在两个内角之差是第三个内角的两倍, 则称这个三角形为关于第三个内角的“差倍角三角形”, 例如, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 100^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 20^\circ$, 满足 $\angle A - \angle B = 2\angle C$, 所以 $\triangle ABC$ 是关于 $\angle C$ 的“差倍角三角形”;

(1) 如图 1, $\triangle ABC$ 是关于 $\angle C$ 的“差倍角三角形” (其中 $\angle BAC > \angle B$), $AB = 3$, $BC = 9$, 点 D 在 BC 上, 且 $\angle BAD = \angle C$, 求 AC 的长.

(2) 如图 2, 等腰三角形 ABC 中, 点 D 是底边 BC 的一个黄金分割点 ($CD < BD$), 且 $AB = AC = BD$. 求证: $\triangle ABC$ 是关于 $\angle B$ 的“差倍角三角形”.

(3) 如图 3, 五边形 $ABCDE$ 内接于圆, 连接 AC , AD 与 BE 相交于点 F , G , $BF = 1$, $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{DE}$. $\triangle ABE$ 是关于 $\angle AEB$ 的“差倍角三角形”. 设 $AB = x$, $CD = y$, 求 y 关于 x 的函数关系式.

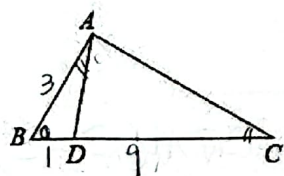


图1

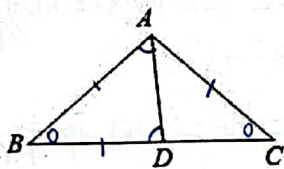


图2

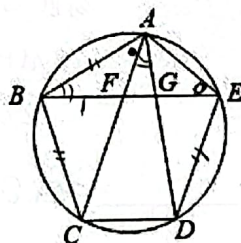


图3

$$\begin{aligned} \therefore \angle ADB &= 2\angle C = 2\angle B \\ \therefore \angle BAC &= \angle BAD + \angle DAC \\ &= \angle BAD + \angle C \\ \therefore \angle BAC - \angle C &= \angle BAD = \angle BDA \\ &= 2\angle B \end{aligned}$$

$$\therefore \angle BAC - \angle C = 2\angle B$$

$\therefore \triangle ABC$ 是关于 $\angle B$ 的“差倍角三角形”

$$\begin{aligned} (3) \because \widehat{AB} &= \widehat{BC} = \widehat{DE} \\ \therefore \angle BAC &= \angle AEB = \angle ACB = \angle DAE \\ \angle BAC &= \angle AEB = \angle ACB = \angle DAE = \alpha \\ \therefore \triangle ABE &\text{ 是关于 } \angle AEB \text{ 的“差倍角三角形”} \\ \therefore \angle BAE &= \angle ABE = 2\angle AEB \\ \therefore \alpha + \angle CAD + \alpha - \angle ABE &= 2\alpha \\ \therefore \angle CAD &= \angle ABE \\ \therefore \widehat{AE} &= \widehat{CD} \therefore DE \parallel AC \end{aligned}$$

(1) $\triangle ABD \sim \triangle CBA$ (母子型相似)

$$AB^2 = BD \cdot BC$$

由题意得 $\angle DAC = \angle B + \angle C$

$$\angle ADC = \angle B + \angle BAD = \angle B + \angle C$$

$$\therefore \angle DAC = \angle ADC$$

$$\therefore AC = DC = 8$$

(2) $\therefore D$ 是 BC 的一个黄金分割点

$$\therefore \frac{BD}{BC} = \frac{CD}{BD}$$

$$\therefore AB = BD = AC$$

$$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{BC}{AC}$$

$$\therefore \angle B = \angle C$$

$$\therefore \triangle DCA \sim \triangle ABC$$

$$\therefore \triangle ADC \text{ 为等腰三角形}$$

$$\therefore \angle DAC = \angle C = \angle B$$

部分解答

28. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 矩形 $ABCD$ 的边 $AB=4$, $BC=8$. 若不改变矩形 $ABCD$ 的形状和大小, 当矩形顶点 A 在 x 轴的正半轴上左右移动时, 矩形的另一个顶点 D 始终在 y 轴的正半轴上随之上下移动.

(1) 当 $\angle OAD = 30^\circ$ 时, 求点 C 的坐标; $C(2, 2\sqrt{3}+4)$

(2) 设 BC 的中点为 M , 连接 OM .

① 探究: 在点 A 移动的过程中, $\angle MOA$ 的度数是否发生变化? 若发生变化, 请求出 $\angle MOA$ 度数的取值范围; 若不发生变化, 请求出 $\angle MOA$ 的度数;

② 当 OM 取最大值时, 设过点 D 、 C 、 M 三点的抛物线与直线 AB 交于点 N , 请求出点 N 的坐标.

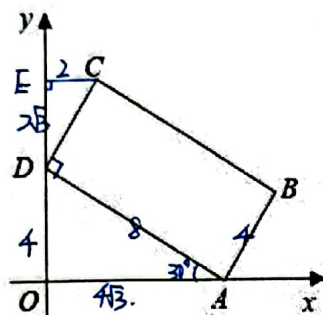


图1

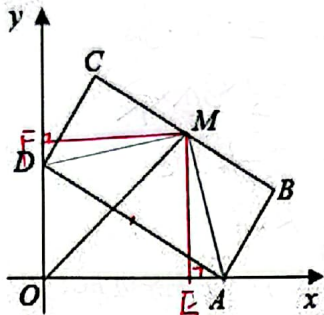


图2

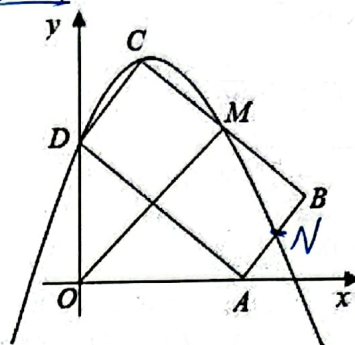


图3

解: 以点 C 作 $CE \perp y$ 轴.

\because 矩形 $ABCD$

$\therefore \angle ADC = 90^\circ, AD = BC = 8$.

$CD = AB = 4$

$\because \angle DAO = 30^\circ$

$\therefore OD = AD \cdot \sin 30^\circ = 4$

$OA = AD \cdot \cos 30^\circ = 4\sqrt{3}$

$\because \angle ECD = 90^\circ - \angle EDC = \angle ADO$

$\angle CED = \angle AOD = 90^\circ$

$\therefore \triangle DCE \sim \triangle ADO$

$\therefore \frac{CE}{OD} = \frac{ED}{OA} = \frac{CD}{AD} = \frac{1}{2}$

$\therefore CE = 2, ED = 2\sqrt{3}$

$\therefore C(2, 4+2\sqrt{3})$.

(2) ① 连接 DM, MA .

\because 矩形 $ABCD$

$\therefore \angle DCM = \angle ABC = 90^\circ$.

$\because M$ 是 BC 中点.

$\therefore CM = MB = 4$

$\therefore CM = CD, MB = AB$

$\therefore \triangle CMD, \triangle ABM$ 均为等腰直角三角形

$\therefore \angle CMD + \angle BMA = 90^\circ, DM = MA$.

$\therefore \angle DMA = 90^\circ$.

过 M 分别向 x 轴, y 轴作垂线交 E, F . 易证 $\triangle DMF \cong \triangle AME$ (自己证).

$\therefore MF = ME$. 四边形 $MFOE$ 为正方形.

$\therefore \angle MOA = 45^\circ$.

② 当 $OM = AE = 8$ 时 取最大值此时 $M(4\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$.

$D(0, 4\sqrt{2}) A(4\sqrt{2}, 0)$.

则 $C(2\sqrt{2}, 6\sqrt{2}) B(6\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

\therefore 抛物线解析式为 $y = -\frac{\sqrt{2}}{4}x^2 + 2x + 4\sqrt{2}$.

而 $AB: y = x - 4\sqrt{2}$.

$\therefore N(\sqrt{2} + \sqrt{34}, -3\sqrt{2} + \sqrt{34})$ 或 $(\sqrt{2} - \sqrt{34}, -3\sqrt{2} - \sqrt{34})$

接27.

$\because BC = CD$

$\therefore CD \parallel BE$

\therefore 四边形 $CDEF$ 是平行四边形.

$\therefore \angle BAF = \angle AEB, \angle ABF = \angle EBA$.

$\therefore \triangle ABF \sim \triangle EBA$ (母子型相似).

$\therefore \frac{AB}{BE} = \frac{BF}{AB}$ 即 $BE = \frac{AB^2}{BF} = x^2$

$\therefore EF = x^2 - 1$

$\therefore y = CD = x^2 - 1$.