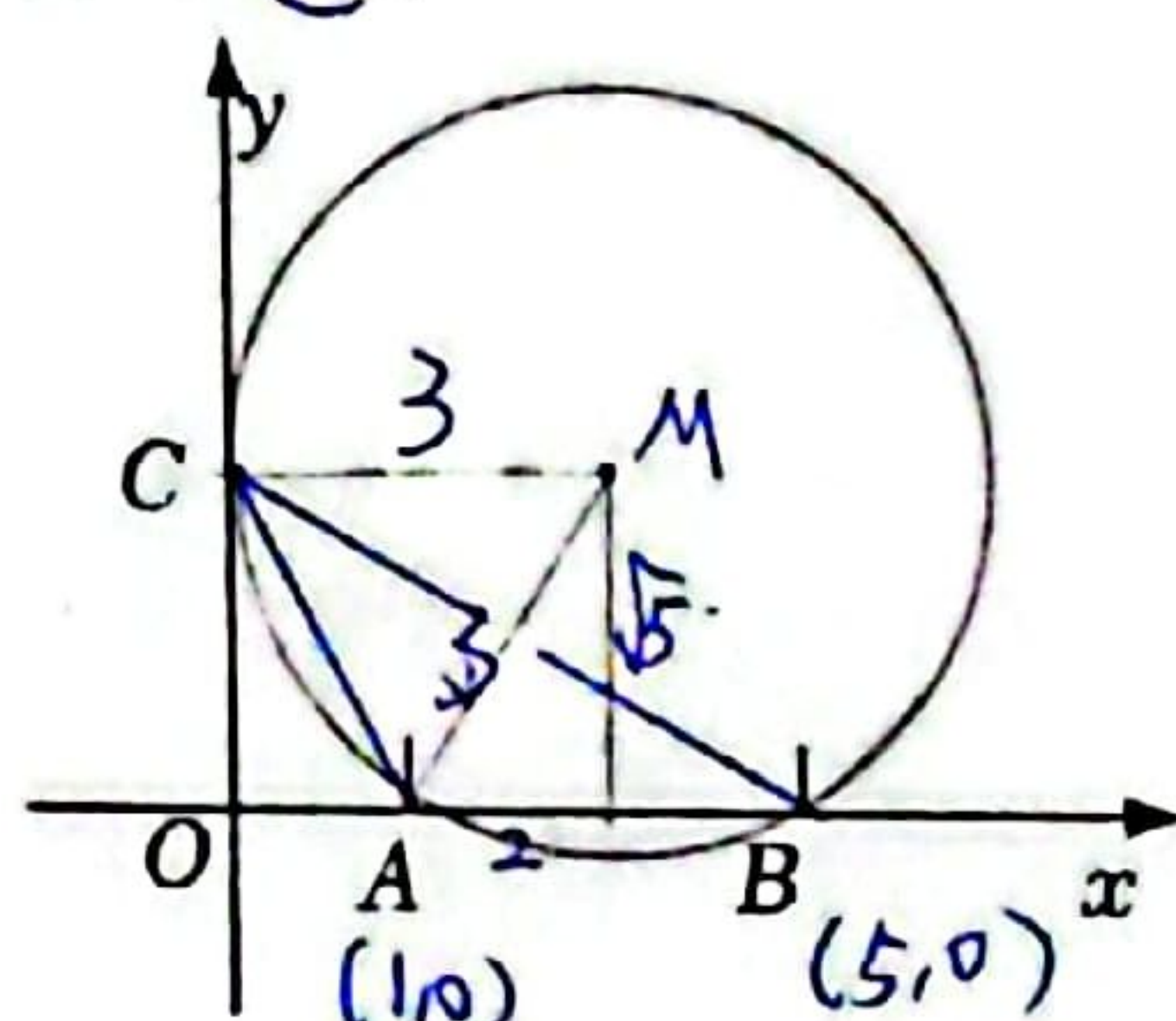


2022 春季数学压轴每日一练 (十三)

2022.03.01

2021 鼓楼区九上期末

6. 平面直角坐标系内, 已知点 $A(1, 0)$, $B(5, 0)$, $C(0, t)$. 当 $t > 0$ 时, 若 $\angle ACB$ 最大, 则 t 的值为 (C)



A. $2\sqrt{2}$

B. $\frac{5}{2}$

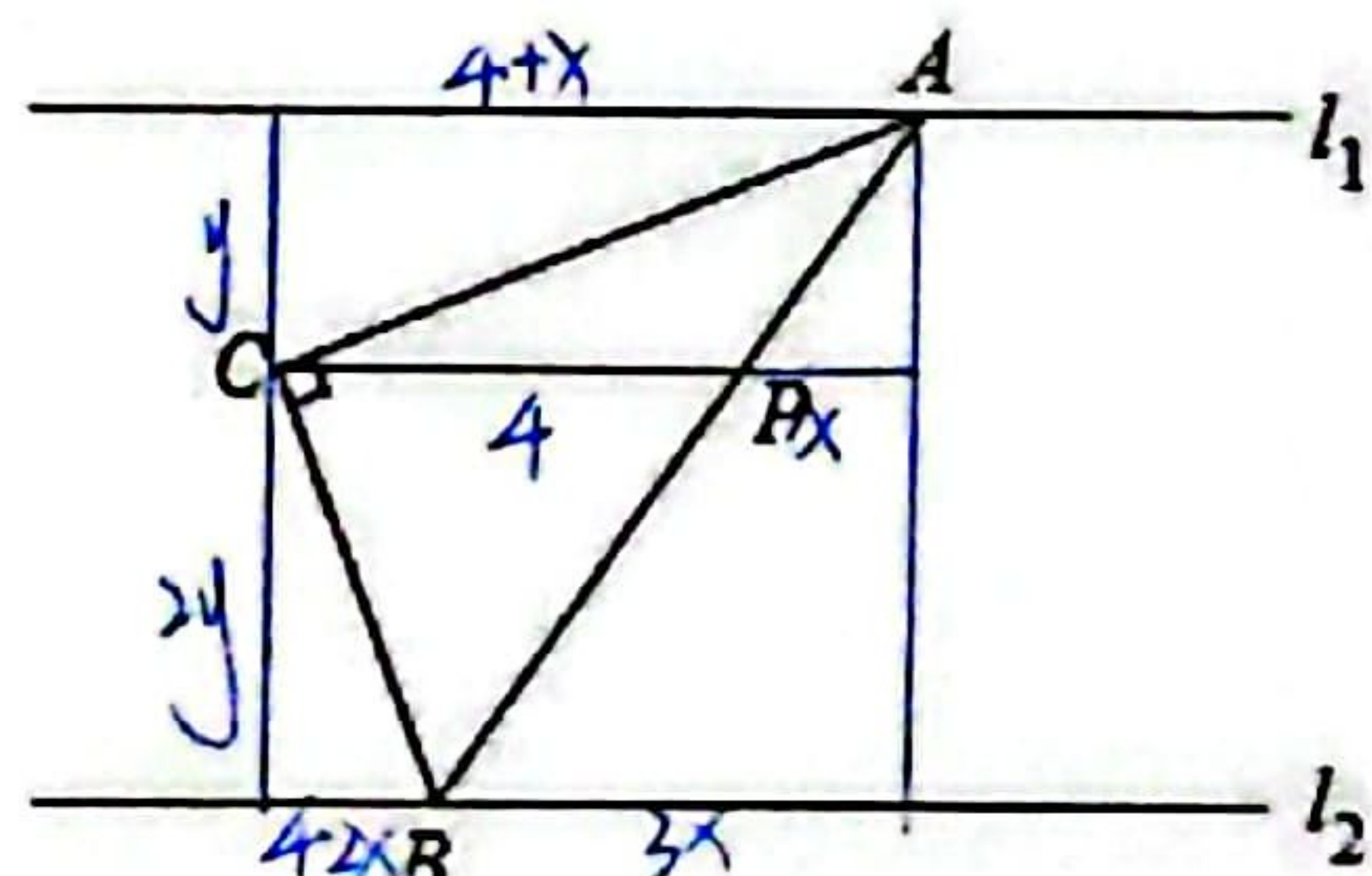
C. $\sqrt{5}$

D. $\frac{3}{2}$

最大张角
过AB两点的圆与y轴相切时
 $\angle ACB$ 最大

2021 建邺区期末

16. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, P 是斜边 AB 边上一点, 且 $BP = 2AP$, 分别过点 A 、 B 作 l_1 、 l_2 平行于 CP , 若 $CP = 4$, 则 l_1 与 l_2 之间的最大距离为 9.



见直角构造“K”型相似

$$\frac{4+x}{y} = \frac{2y}{4-2x}$$

$$2y^2 = (4+x)(4-2x)$$

$$= -2(x+1)^2 + 18$$

当 $x = -1$ 时, $y^2_{\max} = 9$, 则 $y_{\max} = 3$

Q: 为什么可以设为负?

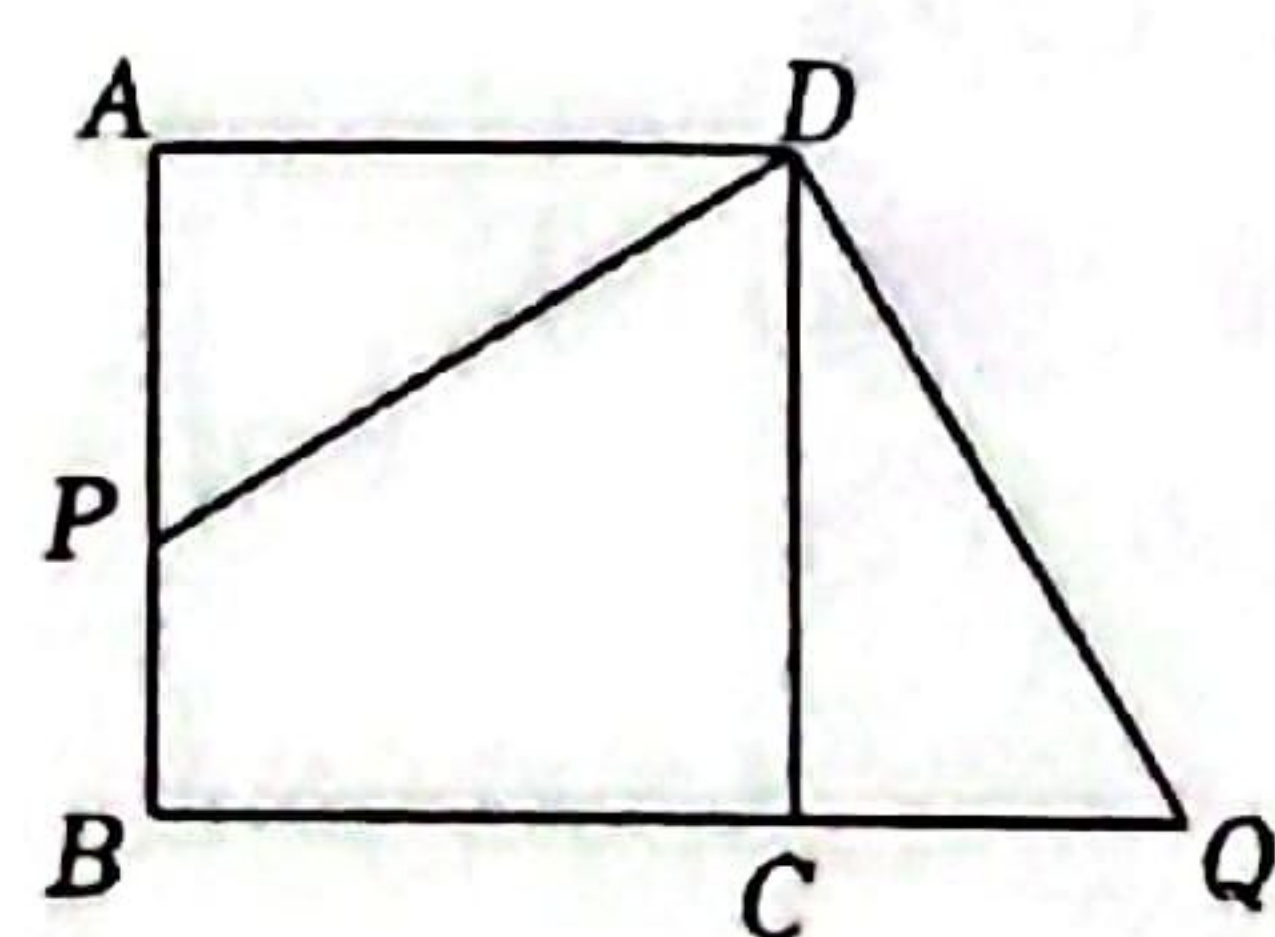
27. (1) 如图1, 将直角三角板的直角顶点放在正方形 $ABCD$ 上, 使直角顶点与 D 重合, 三角板的一边交 AB 于点 P , 另一边交 BC 的延长线于点 Q . 则 DP = DQ (填“>”“<”或“=”);

(2) 将 (1) 中“正方形 $ABCD$ ”改成“矩形 $ABCD$ ”, 且 $AD = 2$, $CD = 4$, 其他条件不变.

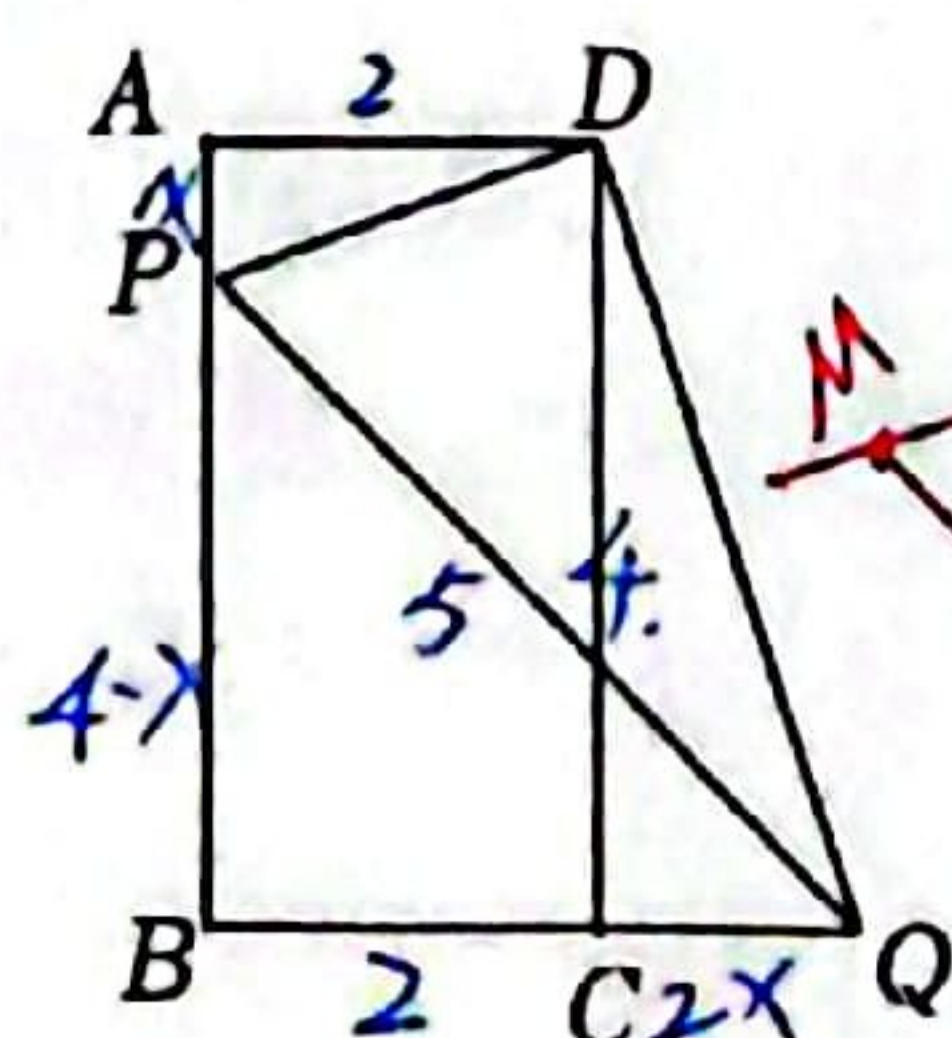
①如图2, 若 $PQ = 5$, 求 AP 长.

②如图3, 若 BD 平分 $\angle PDQ$, 则 DP 的长为 $\frac{2\sqrt{10}}{3}$.

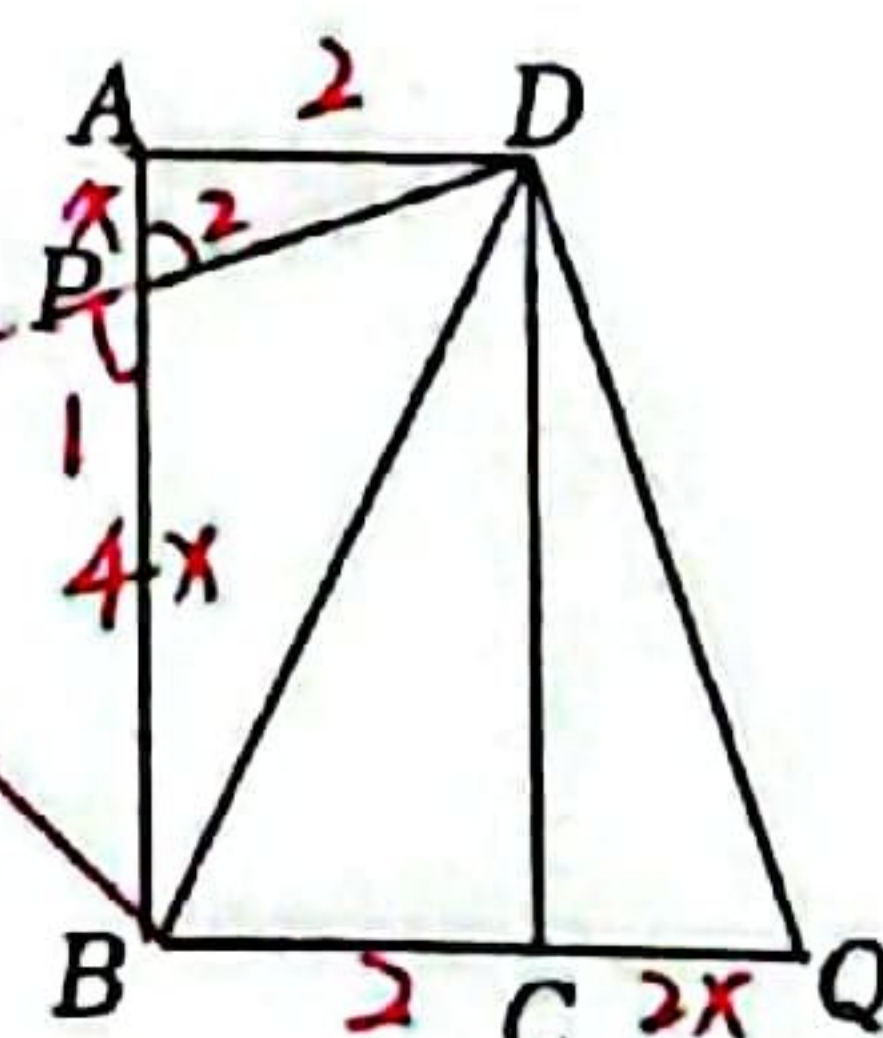
② 角平分线



(图1)



(图2)



(图3)

(2) ① \because 四边形 $ABCD$ 是矩形
 $\therefore \angle A = \angle ADC = \angle BCD = 90^\circ$
 $\therefore \angle ADP + \angle PDC = \angle CDQ + \angle PDC = 90^\circ$
 $\therefore \angle ADP = \angle CDQ$
 $\because \angle A = \angle DCQ = 90^\circ$
 $\therefore \triangle ADP \sim \triangle CDQ$
 $\therefore \frac{AP}{CQ} = \frac{AD}{CD} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
 设 $AP = x$, 则 $CQ = 2x$
 $\therefore PB = 4 - x$, $BQ = 2 + 2x$

在 $\triangle PBQ$ 中
 $(4-x)^2 + (2+2x)^2 = 5^2$
 解得 $x = 1$
 即 $AP = 1$

\hookrightarrow 对称性
 将 DBQ 沿 BD 对折.
 $\angle M = \angle Q$
 相似: $\angle APD = \angle Q$
 $\therefore \angle 1 = \angle 2 = \angle Q$
 又 $\angle M = \angle Q$
 $\angle 1 = \angle M$
 \downarrow
 等腰.
 $4 - x = 2 + 2x$
 $x = \frac{2}{3}$
 $\therefore PD = \frac{2\sqrt{10}}{3}$

27. 问题呈现: 探究二次函数 $y = -x(x-3) + m$ (其中 $0 \leq x \leq 3$, m 为常数) 的图象与一次函数 $y = x+2$ 的图象公共点.

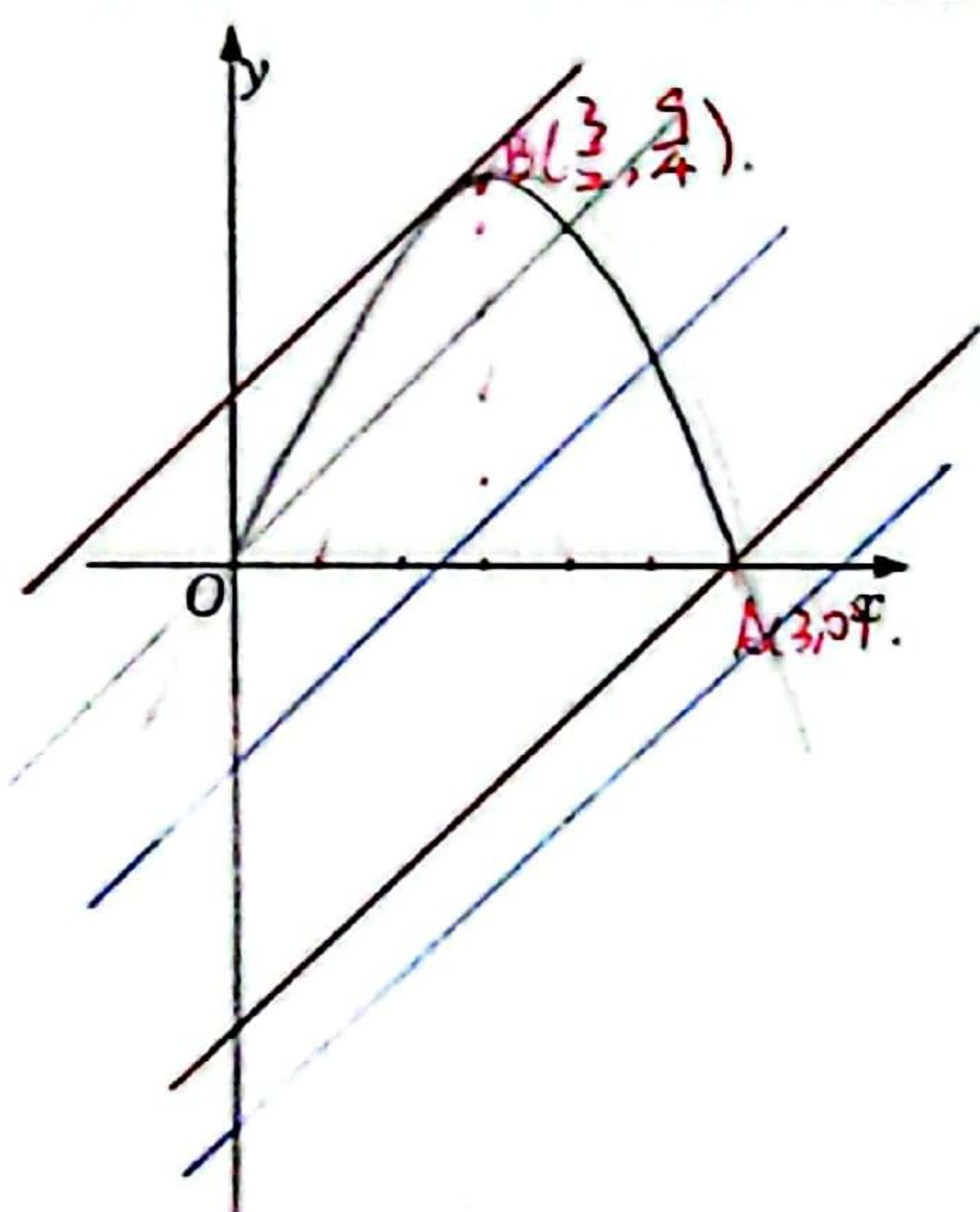
问题解决:

(1) 问题可转化为: 二次函数 $y = -x(x-3)$ ($0 \leq x \leq 3$) 的图象与一次函数 $y = x+2$ 的图象的公共点.

(2) 在下列平面直角坐标系中画出 $y = -x(x-3)$ ($0 \leq x \leq 3$) 的图象.

(3) 请结合 (2) 中图象, 就 m 的取值范围讨论两个图象公共点的个数.

问题拓展: 若二次函数 $y = -x^2 + m$ (其中 $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{4}$, m 为常数) 的图象与一次函数 $y = -2x+2$ 的图象有两个公共点, 则 m 的取值范围为 $1 < m \leq \frac{17}{16}$.



临界值

$$(3) \textcircled{1} -x(x-3) = x+2-m$$

$$x^2 - 2x + 2 - m = 0$$

$$\Delta = 4m - 4 = 0$$

即 $m=1$ 时有且只有一个交点.

② 过点 O (直线)

$$2 - m = 0, m = 2.$$

③ 过点 A (直线)

$$0 = 3 + 2 - m$$

$$m = 5.$$

∴ 当 $m > 5$ 时, 两函数无交点,
 当 $2 < m \leq 5$ 时, 两函数有一个交点,
 当 $1 < m \leq 2$ 时, 两函数有两个交点,
 当 $m = 1$ 时, 两函数只有一个交点,
 当 $m < 1$ 时, 两函数无交点.

综上所述, 当 $m > 5$ 或 $m < 1$ 时, 两函数无交点.

当 $2 < m \leq 5$ 或 $m = 1$ 时, 两函数有一个交点.

当 $1 < m \leq 2$ 时, 两函数有两个交点.

问题拓展.

$$y = -x^2 \left(\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{4} \right)$$

$$\text{与 } y = -2x + 2 - m$$

