

2022 春季数学压轴每日一练（十四）

2021 宿迁沭阳九上期末

1. 抛物线 $y = x^2 + bx + 3$ 的对称轴为直线 $x = 1$. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 + bx + 3 - t = 0$ (t 为实数) 在 $-1 < x < 3$ 的范围内有实数根, 则 t 的取值范围是 (D)

A. $2 \leq t < 11$

B. $t \geq 2$

C. $6 < t < 11$

D. $2 \leq t < 6$

① 抛物线确定:

$x = -\frac{b}{2a} = 1 \rightarrow b = -2$

$\therefore y = x^2 - 2x + 3$

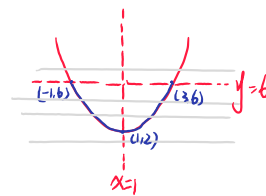
② 函数方程

$x^2 - 2x + 3 = t$

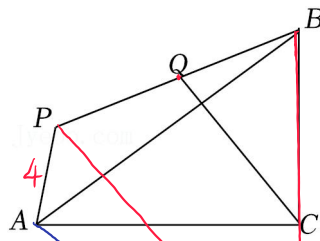
$y = x^2 - 2x + 3$ ($-1 < x < 3$)

$y = t$

有交点,



2. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 8$, $BC = 6$, 点 P 是平面内一个动点, 且 $AP = 4$, Q 为 BP 的中点, 在 P 点运动过程中, 设线段 CQ 的长度为 m , 则 m 的取值范围是 $6 \leq m \leq 14$



Q是中点, C变中点

$MA = 10$

CQ变中直线

$CQ = \frac{1}{2}PM$

P的轨迹是以A为圆心, 半径为4的圆上一点,

$\max = MA + 4$

$\min = MA - 4$

3. 如图①, $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 是有公共顶点的等腰直角三角形, $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$, 点 P 为射线 BD , CE 的交点.

图示: 手拉手

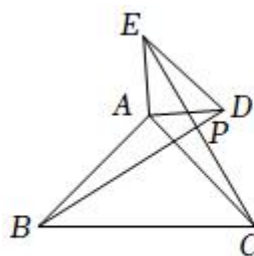
(1) 如图②, 将 $\triangle ADE$ 绕点 A 旋转, 当 C, D, E 在同一条直线上时, 连接 BD, BE .

求证: $BD = CE$ 且 $BD \perp CE$. $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ (详略)

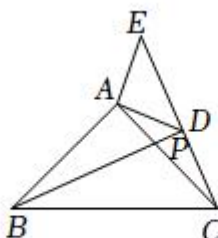
(2) 若 $AB = 8$, $AD = 4$, 把 $\triangle ADE$ 绕点 A 旋转,

① 当 $\angle EAC = 90^\circ$ 时, 求 BP 的长; $BP = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ 或 $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ (详略)

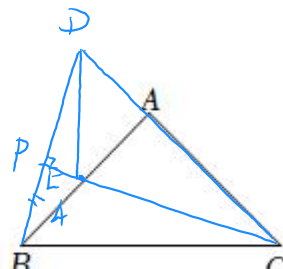
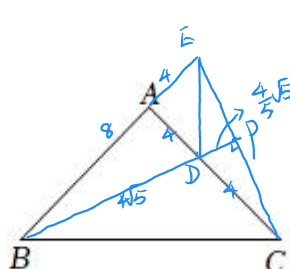
② 旋转过程中线段 BP 长的最小值是 $4\sqrt{5} - 4$.



①



②



备用图

(2) ② 由 (1) 得 旋转过程中

$\triangle ABD \cong \triangle AEC$

$PB \perp EC$

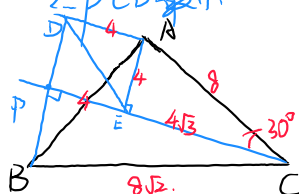
$\angle PBC = 90^\circ$

$\sin \angle PCB = \frac{PB}{BC}$

$\angle PCB$ 越小, 则 PB 越小.

当 $AE \perp PC$ 时,

$\angle PCB$ 最小.



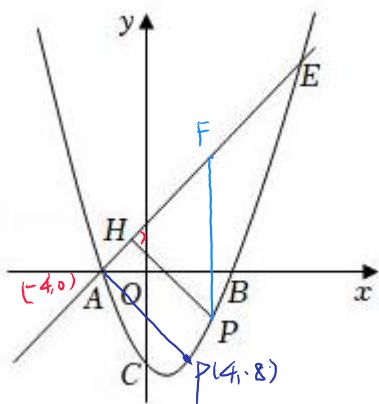
$PB = \sqrt{(8\sqrt{2})^2 - (4+4\sqrt{2})^2}$

4. 如图, 在平面直角坐标系内, 抛物线 $y = ax^2 + bx - 8$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于点 A 、点 B , 与 y 轴交于点 C , 且 $OB = 2OA$. 过点 A 的直线 $y = x + 4$ 与抛物线交于点 E . 点 P 为第四象限内抛物线上的一个动点, 过点 P 作 $PH \perp AE$ 于点 H .

(1) 抛物线的表达式中, $a = \underline{\frac{1}{4}}$, $b = \underline{-1}$;

(2) 在点 P 的运动过程中, 若 PH 取得最大值, 求这个最大值和点 P 的坐标;

(3) 在 (2) 的条件下, 在 x 轴上求点 Q , 使以 A, P, Q 为顶点的三角形与 $\triangle ABE$ 相似.



(2) 斜化直 (详略)

$$PH = \frac{\sqrt{2}}{2} PF$$

$$P(4, -8)$$

$$(PH)_{\max} = 8\sqrt{2}$$

(3) 由题意得

$$\angle QAP = 45^\circ, AP = 8\sqrt{2}$$

$$E(12, 16)$$

$$A(-4, 0), B(8, 0)$$

$$\therefore AE = 16\sqrt{2}, AB = 12$$

$$\angle EAB = 45^\circ$$

$$\therefore \angle EAB = \angle QAP$$

$$\text{当 } \frac{AE}{AB} = \frac{AP}{AQ} \text{ 时 } \triangle EAB \sim \triangle PAQ$$

$$\frac{16\sqrt{2}}{12} = \frac{8\sqrt{2}}{AQ} \rightarrow AQ = 6 \rightarrow Q(2, 0)$$

$$\text{当 } \frac{AE}{AB} = \frac{AQ}{AP} \text{ 时 } \triangle EAB \sim \triangle QAP$$

$$\frac{16\sqrt{2}}{12} = \frac{AQ}{8\sqrt{2}} \rightarrow AQ = \frac{16}{3} \rightarrow Q(\frac{52}{3}, 0)$$

综上: Q 的坐标为 $(2, 0)$ 或 $(\frac{52}{3}, 0)$