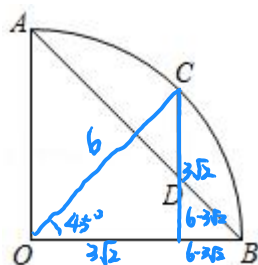


2022 春季数学压轴每日一练（二十）

2020 吴中区三模

10. 如图，扇形 AOB 中， $\angle AOB = 90^\circ$ ，半径 $OA = 6$ ， C 是 \widehat{AB} 的中点， $CD \parallel OA$ ，交 AB 于点 D ，则 CD 的长为 (D)



$$CD = 3\sqrt{2} - (6 - 3\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} - 6$$

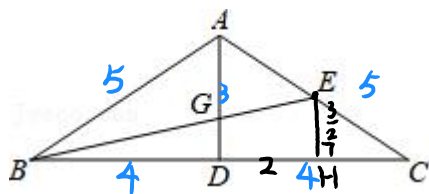
A. $2\sqrt{2} - 2$

B. $\sqrt{2}$

C. 2

D. $6\sqrt{2} - 6$

18. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 、 BE 分别是边 BC 、 AC 上的中线， $AB = AC = 5$ ， $\cos \angle C = \frac{4}{5}$ ，那么 $GE = \frac{\sqrt{7}}{2}$ 。



$$EH = \frac{3}{2}$$

$$BE = \sqrt{36 + \frac{9}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{7}$$

$$\frac{BE - GE}{BE} = \frac{4}{6} \Rightarrow GE = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$GE = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

27. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， E 是 AB 上一点， F 是 AD 延长线上一点，且 $DF = BE$ 。

(1) 求证： $CE = CF$ ； $\triangle CEB \cong \triangle CFD$

(2) 图 1 中，若 G 在 AD 上，且 $\angle GCE = 45^\circ$ ，则 $GE = BE + GD$ 成立吗？为什么？

(3) 运用 (1)、(2) 解答中所积累的经验和知识，完成下题：如图 2，在直角梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ($BC > AD$)， $\angle B = 90^\circ$ ， $AB = BC = 6$ ， E 是 AB 上一点，且 $\angle DCE = 45^\circ$ ， $BE = 2$ ，求 DE 的长。

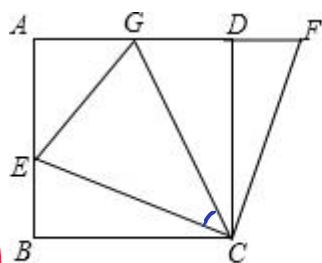


图1

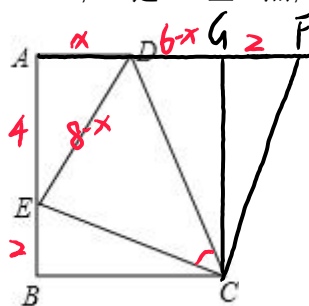


图2

(2) 成立。

$$\triangle CEG \cong \triangle CFG (SAS)$$

(3) 延长 AD 到 F ，使得 $DF = BE$ ，过 C 作 $CG \perp DF$ 。

$$\text{同理得，} DE = DF = DG + BE = DG + 2 = AB - AD + 2 = 6 - AD + 2 = 8 - AD.$$

$$\because DE = \sqrt{4^2 + AD^2}$$

$$\therefore \sqrt{4^2 + AD^2} = 8 - AD$$

$$\therefore AD = 3$$

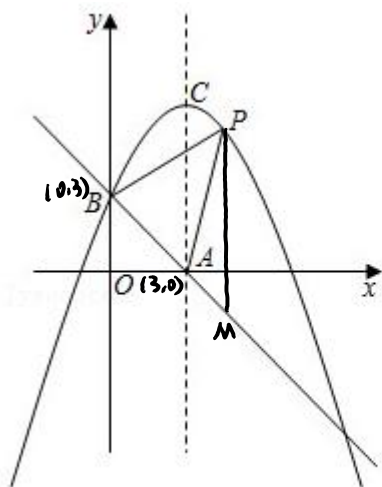
$$\therefore DE = 5$$

28. 如图所示，在平面直角坐标系中，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的顶点坐标为 $C(3, 6)$ ，并与 y 轴交于点 $B(0, 3)$ ，点 A 是对称轴与 x 轴的交点。

(1) 求抛物线的解析式； $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 3$

(2) 如图①所示， P 是抛物线上的一个动点，且位于第一象限，连接 BP ， AP ，求 $\triangle ABP$ 的面积的最大值；

(3) 如图②所示，在对称轴 AC 的右侧作 $\angle ACD = 30^\circ$ 交抛物线于点 D ，求出 D 点的坐标并探究：在 y 轴上是否存在点 Q ，使 $\angle CQD = 60^\circ$ ？若存在，求点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由。



图①

$$(2) S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \times PM \times |x_A - x_B|$$

$$= \frac{1}{2} \times PM \times 3$$

$$= \frac{3}{2} PM$$

$$P(m, -\frac{1}{3}m^2 + 2m + 3)$$

$$M(m, -m + 3)$$

$$PM = -\frac{1}{3}m^2 + 3m$$

$$S_{\triangle ABP} = -\frac{1}{2}(m - \frac{3}{2})^2 + \frac{81}{8}$$

\therefore 当 $m = \frac{3}{2}$ 时， $S_{\triangle ABP}$ 的最大值为 $\frac{81}{8}$

(3) 存在，设点 D 的坐标为 $(t, -\frac{1}{3}t^2 + 2t + 3)$

过点 D 作对称轴的垂线，垂足为 G 。

$$\text{则 } DG = t - 3, CG = 6 - (-\frac{1}{3}t^2 + 2t + 3)$$

$$= -\frac{1}{3}t^2 - 2t + 3$$

$$\therefore \angle ACD = 30^\circ$$

$$\therefore \angle DGA = \angle DC$$

在 $\triangle DCA$ 中

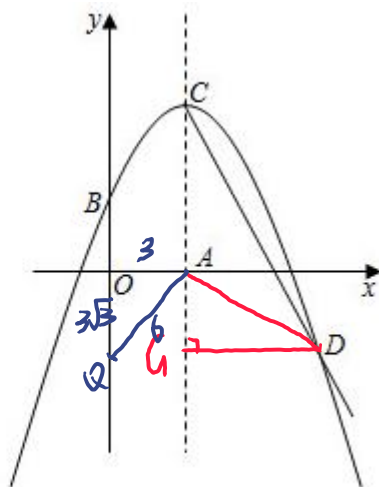
$$CG = \sqrt{3} DG$$

$$\therefore \sqrt{3}(t - 3) = -\frac{1}{3}t^2 - 2t + 3$$

$$\therefore t = 3 + 3\sqrt{3} \text{ 或 } t = 3 \text{ (舍)}$$

$$\therefore D(3 + 3\sqrt{3}, -3)$$

$$\therefore AG = 3, GD = 3\sqrt{3}$$



图②

连结 AD ，在 $\triangle ADG$ 中。

$$AD = 6, \therefore AD = AC = 6, \angle CAD = 120^\circ$$

\therefore 点 Q 的轨迹是以 A 为圆心， AC 为半径的圆上一点，此时 $\angle CQD = 60^\circ$

$\therefore Q$ 在 y 轴上。

$$\therefore AQ = 6.$$

$$\therefore OQ = 3\sqrt{3}$$

$$\therefore Q(0, 3\sqrt{3}), (0, -3\sqrt{3})$$