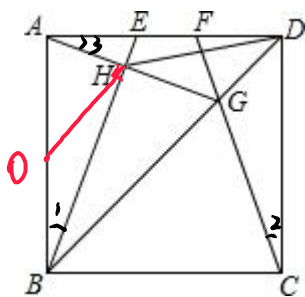


2022 春季初二下数学压轴每日一练（二十八）

1. 如图, E, F 是正方形 $ABCD$ 的边 AD 上两个动点, 满足 $AE = DF$. 连接 CF 交 BD 于点 G , 连接 BE 交 AG 于点 H . 若正方形的边长为 2, 则线段 DH 长度的最小值是 $\sqrt{5}-1$.



$$\triangle AEB \cong \triangle DCF \Rightarrow \angle 1 = \angle 2$$

$$\triangle ADG \cong \triangle CDG \Rightarrow \angle 2 = \angle 3$$

$$\angle 1 = \angle 3 \Rightarrow \angle AHB = 90^\circ$$

取 AB 的中点 O

$HO = 1$. 当 O, H, D 三点共线时, DH 最小

$$(DH)_{\min} = DO - HO = \sqrt{5} - 1$$

2. 在初中数学学习阶段, 我们常常会利用一些变形技巧来简化式子, 解答问题.

材料一: 在解决某些分式问题时, 倒数法是常用的变形技巧之一, 所谓倒数法, 即把式子变成其倒数形式, 从而运用约分化简, 以达到计算目的.

例: 已知: $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{4}$, 求代数式 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 的值.

$$\text{解: } \because \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{4}, \therefore \frac{x^2+1}{x} = 4$$

$$\text{即 } \frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} = 4 \therefore x + \frac{1}{x} = 4 \therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 = 16 - 2 = 14$$

材料二: 在解决某些连等式问题时, 通常可以引入参数“ k ”, 将连等式变成几个值为 k 的等式, 这样就可以通过适当变形解决问题.

例: 若 $2x = 3y = 4z$, 且 $xyz \neq 0$, 求 $\frac{x}{y+z}$ 的值.

$$\text{解: 令 } 2x = 3y = 4z = k \quad (k \neq 0)$$

$$\text{则 } x = \frac{k}{2}, y = \frac{k}{3}, z = \frac{k}{4}, \therefore \frac{x}{y+z} = \frac{\frac{1}{2}k}{\frac{1}{3}k + \frac{1}{4}k} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{12}} = \frac{6}{7}$$

根据材料回答问题:

(1) 已知 $\frac{x}{x^2-x+1} = \frac{1}{4}$, 求 $x + \frac{1}{x}$ 的值.

(2) 已知 $\frac{a}{5} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}$, ($abc \neq 0$), 求 $\frac{3b+4c}{2a}$ 的值.

(3) 若 $\frac{yz}{bz+cy} = \frac{zx}{cx+az} = \frac{xy}{ay+bx} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$, $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$, 且 $abc = 7$, 求 xyz 的值.

$$\begin{aligned} (3) \because \frac{yz}{bz+cy} &= \frac{zx}{cx+az} = \frac{xy}{ay+bx} \\ \therefore \frac{bz+cy}{yz} &= \frac{cx+az}{zx} = \frac{ay+bx}{xy} \\ \therefore \frac{b}{y} + \frac{c}{z} &= \frac{c}{z} + \frac{a}{x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} \\ \therefore \frac{c}{z} &= \frac{a}{x}, \frac{b}{y} = \frac{a}{x} \end{aligned}$$

$$(1) \because \frac{x}{x^2-x+1} = \frac{1}{4}, \therefore \frac{x^2-x+1}{x} = 4$$

$$\text{即 } x - 1 + \frac{1}{x} = 4, \therefore x + \frac{1}{x} = 5$$

$$(2) \text{ 令 } a = 5k, b = 2k, c = 3k,$$

$$\therefore \frac{3b+4c}{2a} = \frac{6k+12k}{10k} = \frac{9}{5}$$

$$\begin{aligned} \therefore x &= \frac{ay}{b}, z = \frac{cy}{b} \\ \text{将 } x, z &\text{ 代入 } \frac{zx}{cx+az} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2} \\ \text{得 } \frac{\frac{cy}{b} \cdot \frac{ay}{b}}{c \cdot \frac{ay}{b} + a \cdot \frac{cy}{b}} &= \frac{\frac{a^2y^2}{b^2} + y^2 + \frac{c^2y^2}{b^2}}{a^2+b^2+c^2} = \frac{y^2}{b^2} \\ \therefore \frac{y}{b} &= \frac{y}{b} \therefore y = \frac{b}{2} \\ \text{同理: } x &= \frac{a}{2}, z = \frac{c}{2} \\ \therefore xyz &= \frac{abc}{8} = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

3. 【方法回顾】

如图1, 过正方形 $ABCD$ 的顶点 A 作一条直线 l 交边 BC 于点 P , $BE \perp AP$ 于点 E , $DF \perp AP$ 于点 F , 若 $DF = 2.5$, $BE = 1$, 则 $EF = \underline{1.5}$.

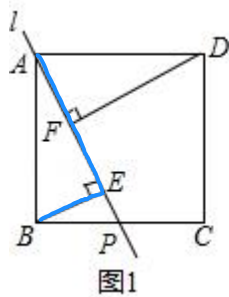


图1

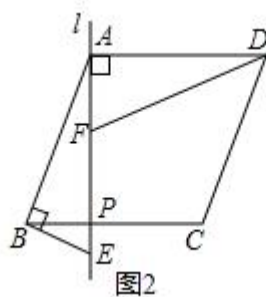


图2

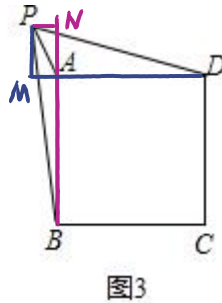


图3

【问题解决】

如图2, 菱形 $ABCD$ 的边长为 $\frac{3}{2}$, 过点 A 作一条直线 l 交边 BC 于点 P , 且 $\angle DAP = 90^\circ$, 点 F 是 AP 上一点, 且 $\angle BAD + \angle AFD = 180^\circ$, 过点 B 作 $BE \perp AB$, 与直线 l 交于点 E , 若 $EF = 1$, 求 BE 的长.

【思维拓展】

如图3, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 P 在 AD 所在直线的上方, $AP = 2$, 连接 PB , PD , 若 $\triangle PAD$ 的面积与 $\triangle PAB$ 的面积之差为 m ($m > 0$), 则 $PB^2 - PD^2$ 的值为 . (用含 m 的式子表示)

【问题解决】

\because 四边形 $ABCD$ 是菱形,
 $\therefore AB = AD$
 $\because BE \perp AB$
 $\therefore \angle ABE = \angle DAF = 90^\circ$
 $\because \angle BAE + \angle AFD = 180^\circ$,
 即 $\angle BAP + \angle FAD + \angle AFD = 180^\circ$
 又 $\because \angle ADF + \angle FAD + \angle AFD = 180^\circ$
 $\therefore \angle BAP = \angle ADF$
 $\therefore \triangle DAF \cong \triangle ABE (ASA)$
 $\therefore DF = AE = AF + EF = AF + 1$,
 $AF = BE$
 $\because \angle DAF = 90^\circ$
 $\therefore AF^2 + AD^2 = DF^2$
 $\therefore AF^2 + (\frac{3}{2})^2 = (AF + 1)^2$
 解得 $AF = \frac{5}{8}$
 $\therefore BE = AF = \frac{5}{8}$

【思维拓展】

设正方形边长为 a , $PN = x$, $PM = y$
 $S_{\triangle PAD} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot y$
 $S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot x$

$$\begin{cases} S_{\triangle PAD} - S_{\triangle PAB} \\ = \frac{1}{2} a(y - x) = m \\ ay - ax = 2m. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} PB^2 - PD^2 &= x^2 + (a+y)^2 - [y^2 + (a+x)^2] \\ &= x^2 + a^2 + y^2 + 2ay - (y^2 + a^2 + 2ax + x^2) \\ &= 2ay - 2x = 4m. \end{aligned}$$