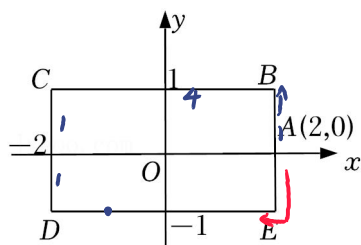


2022 春季初二下数学压轴每日一练 (三十一)

2022.04.29
Daw

2022 金海湖学校期中

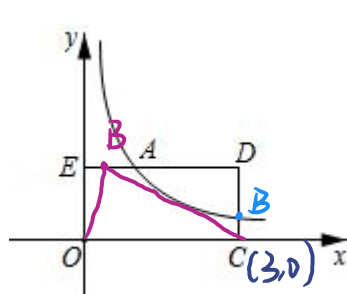
10. 如图, 矩形 $BCDE$ 的各边分别平行于 x 轴或 y 轴, 物体甲和物体乙由点 $A(2, 0)$ 同时出发, 沿矩形 $BCDE$ 的边作环绕运动, 物体甲按逆时针方向以 1 个单位/秒匀速运动, 物体乙按顺时针方向以 2 个单位/秒匀速运动, 则两个物体运动后的第 2021 次相遇地点的坐标是 (B)



第一次相遇 $S_1 + S_2 = 12$, $S_1 = 4$, $S_2 = 8$
 二. $S_1 + S_2 = 24$, $S_1 = 8$, $S_2 = 16$.
 三. $S_1 + S_2 = 36$, $S_1 = 12$, $S_2 = 24$.
 每三次相遇回到起点,
 $2021 \div 3 = 673 \dots 2$
 故第一次相遇地点一致

- A. $(2, 0)$ B. $(-1, -1)$ C. $(-1, 1)$ D. $(1, -1)$

18. 在平面直角坐标系中, 对于不在坐标轴上的任意一点 $A(x, y)$, 我们把点 $B(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$ 称为点 A 的“倒数点”. 如图, 矩形 $OCDE$ 的顶点 C 为 $(3, 0)$, 顶点 E 在 y 轴上, 函数 $y = \frac{2}{x} (x > 0)$ 的图象与 DE 交于点 A . 若点 B 是点 A 的“倒数点”, 且点 B 在矩形 $OCDE$ 的一边上, 则 $\triangle OBC$ 的面积为 $\frac{1}{4}$ 或 $\frac{3}{2}$.



设 $A(m, \frac{2}{m})$
 则 $B(\frac{1}{m}, \frac{m}{2})$
 1° 点 B 在 DC 上
 $\frac{1}{m} = 3$
 则 $m = \frac{1}{3}$
 $\therefore B(3, \frac{1}{6})$ $S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$
 2° 点 B 在 ED 上
 $\frac{m}{2} = \frac{2}{m}$
 $m = \pm 2$
 $\therefore m = 2$
 $B(\frac{1}{2}, 1)$ $S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 1 = \frac{3}{2}$

27. 【问题情境】

课外兴趣小组活动时, 老师提出了如下问题:

- (1) 如图 1, $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 若 $AC = 12$, $BC = 5$, 点 M 是斜边 AB 上一动点, 求线段 CM 的最小值.

小明在组内经过合作交流, 得到了如下的解决方法:

根据直线外一点和直线上各点连接的所有线段中, 垂线段最短, 得到:

当 $CM \perp AB$ 时, 线段 CM 取得最小值. 请你根据小明的思路求出这个最小值.

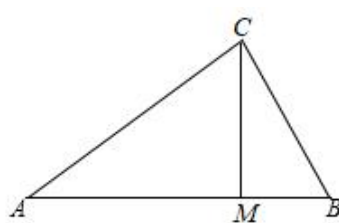
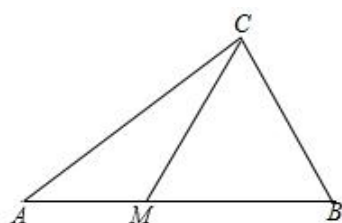


图1

0° $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 12$, $BC = 5$
 $\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 13$
 $\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times CM$
 $\therefore CM = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{60}{13}$

【思维运用】

(2) 如图 2, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 4$, $BC = 3$, M 为斜边 AB 上一动点, 过 M 作 $MD \perp AC$ 于点 D , 过 M 作 $ME \perp BC$ 于点 E , 求线段 DE 的最小值.

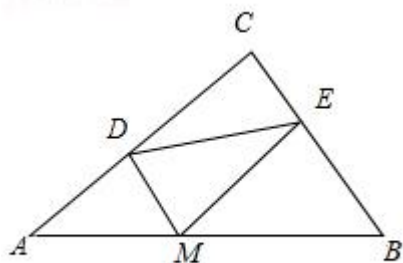


图2

连结 CM .

$$\because \angle ACB = 90^\circ, AC = 4, BC = 3.$$

$$\therefore AB = 5$$

$$\because MD \perp AC, ME \perp BC$$

$$\therefore \angle DME = \angle MEC = \angle ACB = 90^\circ$$

\therefore 四边形 $DMEC$ 是矩形.

$$\therefore CM = DE$$

当 $CM \perp AB$ 时, CM 最小.

$$\text{此时 } CM = \frac{BC \times AC}{AB} = \frac{12}{5}$$

$\therefore DE$ 的最小值为 $\frac{12}{5}$

【问题拓展】

(3) 如图 3, $AB = 6$, P 为线段 AB 上的一个动点, 分别以 AP , PB 为边在 AB 的同侧作菱形 $APCD$ 和菱形 $PBEF$, 点 P , C , E 在一条直线上. $\angle DAP = 60^\circ$, M , N 分别是对角线 AC , BE 的中点, 当点 P 在线段 AB 上移动时, 点 M , N 之间的距离的最小值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. (直接写出结果, 不需要写过程)

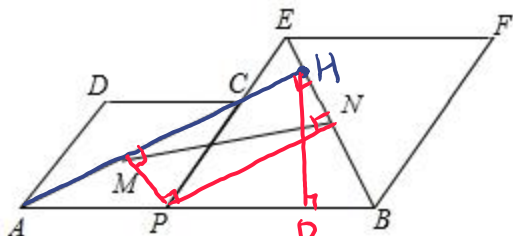


图3

代数解法:

$$\text{设 } AP = x, \text{ 则 } PB = 6 - x.$$

$$\text{则 } PM = \frac{1}{2}x, PH = \frac{\sqrt{3}}{2}(6 - x)$$

$$\therefore MN^2 = PM^2 + PH^2$$

$$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}(6 - x)^2$$

$$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}(36 - 12x + x^2)$$

$$= x^2 - 9x + 27$$

$$= (x - \frac{9}{2})^2 - \frac{81}{4} + 27$$

$$= (x - \frac{9}{2})^2 + \frac{27}{4}$$

$$\therefore (MN^2)_{\min} = \frac{27}{4} \Rightarrow (MN)_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

隐藏定点: (几何解法) 适合本题背景

$$\angle CAP = 30^\circ, \angle EBA = 60^\circ$$

延长 AC 交 EB 于点 H

$$\angle AHB = 90^\circ. \text{ H 点是定点.}$$

连结 MP, PN .

则四边形 $MPNH$ 是矩形

$$MN = HP$$

$$\therefore (HP)_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore (MN)_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$