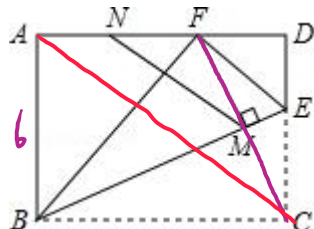


2022 春季初二下数学压轴每日一练（三十三）

2022 省锡中期中

1. 如图，矩形纸片 $ABCD$ ， $AB=6\text{cm}$ ， $BC=8\text{cm}$ ， E 为边 CD 上一点，将 $\triangle BCE$ 沿 BE 所在的直线折叠，点 C 恰好落在 AD 边上的点 F 处，过点 F 作 $FM \perp BE$ ，垂足为点 M ，取 AF 的中点 N ，连接 MN ，则 MN

= 5 cm .



M 是 FC 的中点 (折叠 \rightarrow 垂直平分 \rightarrow 中点)

N 是 AF 的中点

MN 是 $\triangle FAC$ 的中位线

$MN = \frac{1}{2}AC = 5$

2. 如图 1，矩形 $OABC$ 的顶点 A 、 C 分别在 x 、 y 轴的正半轴上，点 B 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 的第一

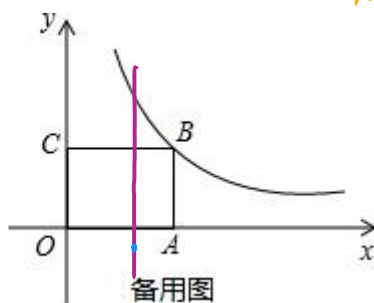
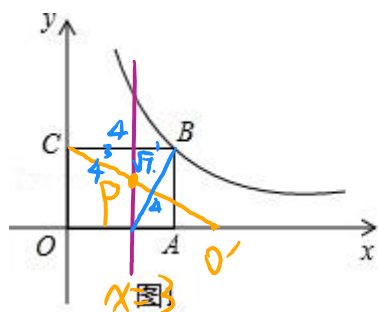
象限内的图象上， $OA=4$ ， $OC=3$ ，动点 P 在 y 轴的右侧，且满足 $S_{\triangle PCO} = \frac{3}{8} S_{\text{矩形 } OABC}$.

- (1) 若点 P 在这个反比例函数的图象上，求点 P 的坐标;

- (2) 连接 PO 、 PC ，求 $PO+PC$ 的最小值;

- (3) 若点 Q 是平面内一点，使得以 B 、 C 、 P 、 Q 为顶点的四边形是菱形，请你直接写出满足条件的所

有点 Q 的坐标.



$k=12$
 $S_{\text{矩形 } OABC} = 3 \times 4 = 12$

$\therefore S_{\triangle PCO} = \frac{3}{8} S_{\text{矩形 } OABC} = \frac{3}{8} \times 12 = \frac{9}{2}$

$P(m, \frac{12}{m})$ 则 $\frac{1}{2} \times 3m = \frac{9}{2} \therefore m=3 \therefore P(3, 4)$

(2) 将 O 关于直线 $x=3$ 对称

则 O 关于直线 $x=3$ 的对称点 $O'(6, 0)$

连接 $O'C$ ，则 $(PO+PC)_{\min} = O'C$

$O'C = 3\sqrt{5}$

几何解法

① BC 为对角线

$PB \neq PC$

② BC 为边

$BC = CP$, $P(3, 3 \pm \sqrt{5})$

几何画图法
此处补 $Q(7, 3+\sqrt{5})$, $Q(7, 3-\sqrt{5})$

$BP = BC$, $P(3, 3 \pm \sqrt{5})$

$Q(-1, 3+\sqrt{5})$, $Q(-1, 3-\sqrt{5})$

(3) 代数解法:

$B(4, 3)$, $C(0, 3)$. 设 $P(3, a)$

① BC 为对角线

则 $Q(1, 6-a)$

\because 菱形, $\therefore BP = BQ$

即 $BP^2 = BQ^2$, $1^2 + (3-a)^2 = 9 + (3-a)^2$

\therefore 此情况不存在

② BP 为对角线

则 $Q(7, a)$

\because 菱形, $\therefore BC = BQ$ 即 $BC^2 = BQ^2$

$4^2 = 3^2 + (3-a)^2$

$a-3 = \pm\sqrt{5}$

$\therefore a = 3+\sqrt{5}$ 或 $a = 3-\sqrt{5}$

$\therefore Q(7, 3+\sqrt{5})$, $Q(7, 3-\sqrt{5})$

③ BQ 为对角线

则 $Q(-1, a)$

\because 菱形, $\therefore BP = BC$

即 $BP^2 = BC^2$, $1 + (3-a)^2 = 4^2$

$a-3 = \pm\sqrt{5}$

$\therefore a = 3+\sqrt{5}$ 或 $a = 3-\sqrt{5}$

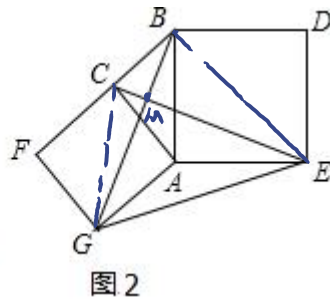
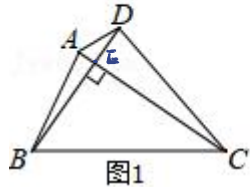
$\therefore Q(-1, 3+\sqrt{5})$, $Q(-1, 3-\sqrt{5})$ 综上

3. 如图，我们把对角线互相垂直的四边形叫做垂美四边形。（如图1）

（1）概念理解：在平行四边形，矩形，菱形，正方形中，一定是垂美四边形的是 菱形；

（2）性质证明：如图1，四边形 $ABCD$ 是垂美四边形，求证： $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ ；

（3）问题解决：如图2，分别以 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的直角边 AC 和斜边 AB 为边向外作正方形 $ACFG$ 和正方形 $ABDE$ ，联结 CE ， BG ， GE ，已知 $AC=4$ ， $AB=5$ ，求 GE 的长。



(2) 设对角线相交于点E

$$\because AC \perp BD$$

$$\therefore AE^2 + DE^2 = AD^2, BE^2 + EC^2 = BC^2$$

$$AE^2 + BE^2 = AB^2, DE^2 + EC^2 = DC^2$$

$$\therefore AD^2 + BC^2 = AE^2 + DE^2 + BE^2 + EC^2$$

$$AB^2 + DC^2 = AE^2 + BE^2 + DE^2 + EC^2$$

$$\therefore AD^2 + BC^2 = AB^2 + DC^2$$

(3) 设 AB 与 CE 相交于点 M ，联结 CG ， BE 。

$$\because \angle CAG = \angle BAE = 90^\circ$$

$$\therefore \angle CAG + \angle BAC = \angle BAE + \angle BAC$$

$$\text{即 } \angle GAB = \angle CAE$$

在 $\triangle GAB$ 和 $\triangle CAE$ 中

$$\begin{cases} AG = AC \\ \angle GAB = \angle CAE \\ AB = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle GAB \cong \triangle CAE (\text{SAS})$$

$$\therefore \angle ABG = \angle AEC, \text{ 又 } \angle AEC + \angle AEM = 90^\circ$$

$$\therefore \angle ABG + \angle AEM = 90^\circ, \text{ 即 } CE \perp BG,$$

\therefore 四边形 $CGEB$ 是垂美四边形。

$$\text{由 (2) 得 } CG^2 + BE^2 = CB^2 + GE^2$$

$$\because AC = 4, AB = 5,$$

$$\therefore BC = 3, CG = 4, BE = 5\sqrt{2},$$

$$\therefore GE^2 = CG^2 + BE^2 - BC^2 = 73$$

$$\therefore GE = \sqrt{73}$$