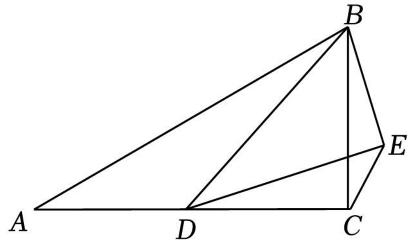
2024春季初三数学每日一题002

002试题来源：2023无锡滨湖区中考一模第16题

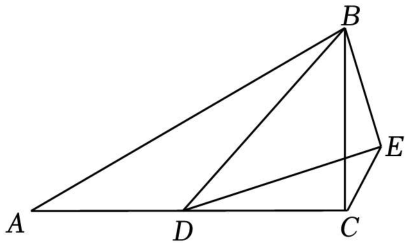
如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle BAC=30^\circ$，$AC=4$，点 D 是边 AC 上一动点，连接 BD，以 BD 为斜边作 $Rt\triangle BDE$，使 $\angle BDE=30^\circ$，$\angle BED=90^\circ$，连接 CE．则 $\triangle CDE$ 面积的最大值(　　)



A. $\dfrac{4}{5}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　D. $\dfrac{5}{6}$

试题解析

如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$\angle BAC=30°$，$AC=4$，点 D 是边 AC 上一动点，连接 BD，以 BD 为斜边作 $Rt\triangle BDE$，使 $\angle BDE=30°$，$\angle BED=90°$，连接 CE．则 $\triangle CDE$ 面积的最大值（　　）



A. $\frac{4}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　D. $\frac{5}{6}$

【分析】过 E 作 $EM\perp AC$，交 AC 的延长线于 M，易证得 $\triangle ACB\backsim\triangle DEB$ 及 $\triangle ADB\backsim\triangle CEB$，得到 $\frac{CE}{AD}=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{2}$，$\angle BAD=\angle BCE=30°$，从而求得 $EM=\sqrt{3}CM$，$CD=(4-CM)$，由面积公式求得 $S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}CD\times EM=-2\sqrt{3}(CM-\frac{1}{2})^2+\frac{\sqrt{3}}{2}$，即可求解．

【解答】解：过 E 作 $EM\perp AC$，交 AC 的延长线于 M，

$\because \angle ACB=90°$，$\angle BAC=30°$，

$\therefore \frac{BC}{AB}=\frac{1}{2}$，

$\because \angle BDE=30°$，$\angle BED=90°$，

$\therefore \triangle ACB\backsim\triangle DEB$，$\angle ABD+\angle DBC=\angle CBE+\angle DBC=60°$，

$\therefore \frac{BE}{BC}=\frac{BD}{AB}$，$\angle ABD=\angle CBE$，

$\therefore \frac{BE}{BD}=\frac{BC}{AB}$，

$\therefore \triangle ADB\backsim\triangle CEB$，

$\therefore \frac{CE}{AD}=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{2}$，$\angle BAD=\angle BCE=30°$，

$\therefore \angle ECM=60°$，

$\therefore \angle CEM=30°$，

$\therefore CE=2CM$，

$\therefore EM=\sqrt{CE^2-CM^2}=\sqrt{3}CM$，

$\therefore AD=2CE=4CM$，

$\therefore CD=4-4CM$，

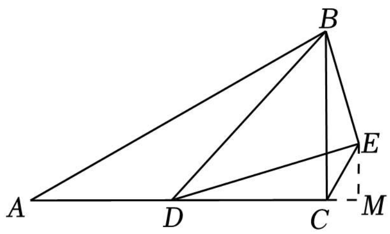
$\therefore S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}CD\times EM$

$=\frac{1}{2}(4-CM)\times\sqrt{3}CM$

$=-2\sqrt{3}(CM^2-CM)$

$=-2\sqrt{3}\left[\left(CM-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]$

$=-2\sqrt{3}(CM-\frac{1}{2})^2+\frac{\sqrt{3}}{2}$，



即 $\triangle CDE$ 面积的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$．

故选：B．

【点评】本题考查了相似三角形的判定和性质，解直角三角形，解题的关键是熟练掌握相似三角形的证明和性质．