

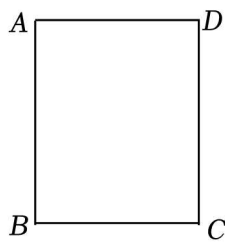
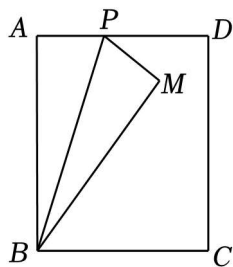
## 2024 春季初三数学每日一题 004

004 试题来源：2023 滨湖区二模

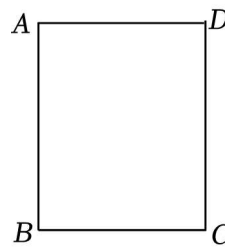
如图,矩形  $ABCD$  中,  $AB=5$ ,  $BC=4$ . 点  $P$  在  $AD$  上运动 (点  $P$  不与点  $A$ 、 $D$  重合) 将  $\triangle ABP$  沿直线翻折,使得点  $A$  落在矩形内的点  $M$  处 (包括矩形边界).

(1) 求  $AP$  的取值范围;

(2) 连接  $DM$  并延长交矩形  $ABCD$  的  $AB$  边于点  $G$ , 当  $\angle ABM=2\angle ADG$  时, 求  $AP$  的长.



备用图



备用图

## 试题解析

(1) 求  $AP$  的取值范围;

【分析】(1) 根据矩形的性质得到  $AB=CD=5$ ,  $BC=AD=4$ ,  $\angle A=\angle C=\angle D=90^\circ$ , 根

据折叠的性质得到  $\angle PMB=\angle A=90^\circ$ ,  $BM=AB=5$ , 根据勾股定理得到

$CM=\sqrt{BM^2-BC^2}=3$ ,  $DM=2$ , 根据相似三角形的判定和性质定理即可得到结论;

解: (1) 当  $M$  落在  $CD$  上时,  $AP$  的长度达到最大,

$\because$  四边形  $ABCD$  是矩形,  $\therefore AB=CD=5$ ,  $BC=AD=4$ ,  $\angle A=\angle C=\angle D=90^\circ$ ,

$\because \triangle ABP$  沿直线翻折,  $\therefore \angle PMB=\angle A=90^\circ$ ,  $BM=AB=5$ ,

$\therefore CM=\sqrt{BM^2-BC^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$ ,  $DM=5-3=2$ ,

$\therefore \angle PMD+\angle BMC=90^\circ$ ,  $\angle PMD+\angle MPD=90^\circ$ ,

$\therefore \angle BMC=\angle MPD$ ,  $\therefore \triangle PDM \sim \triangle MCB$ ,  $\therefore \frac{PD}{CM}=\frac{DM}{BC}$ ,  $\frac{PD}{3}=\frac{2}{4}$

$\therefore PD=\frac{3}{2}$ ,  $AP=\frac{5}{2}$   $\therefore AP$  的取值范围是  $0 < AP \leq \frac{5}{2}$ ;

(2) 连接  $DM$  并延长交矩形  $ABCD$  的  $AB$  边于点  $G$ , 当  $\angle ABM=2\angle ADG$  时, 求  $AP$  的长.

(2) 根据折叠的性质得到  $\angle ABP=\angle MBP$ , 求得  $\angle ABM=2\angle ABP$ , 根据相似三角形的性

质得到  $\frac{AP}{AG}=\frac{AB}{AD}=\frac{5}{4}$ , 设  $AP=5x$ ,  $AG=4x$ , 过  $M$  作  $MH \perp AD$  于  $H$ , 根据折叠的性

质得到  $AP=MP=5x$ ,  $AM \perp BP$ , 根据三角形中位线定理得到  $MN=\frac{1}{2}AG=2x$ , 根据

勾股定理即可得到结论.

(2) 如图,  $\because$  将  $\triangle ABP$  沿直线翻折, 使得点  $A$  落在矩形内的点  $M$  处,

$\therefore \angle ABP=\angle MBP$ ,  $\therefore \angle ABM=2\angle ABP$ ,

$\because \angle ABM=2\angle ADG$ ,  $\therefore \angle ABP=\angle ADG$ ,

$\because \angle A=\angle A$ ,  $\therefore \triangle ADG \sim \triangle ABP$ ,  $\therefore \frac{AP}{AG}=\frac{AB}{AD}=\frac{5}{4}$ ,

设  $AP=5x$ ,  $AG=4x$ , 过  $M$  作  $MH \perp AD$  于  $H$ ,

$\because$  将  $\triangle ABP$  沿直线翻折, 使得点  $A$  落在矩形内的点  $M$  处,

$\therefore AP=MP=5x$ ,  $AM \perp BP$ ,  $\therefore \angle DAM=90^\circ-\angle BAM=\angle ABP=\angle ADG$ ,

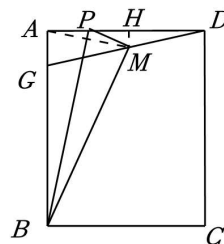
$\therefore AM=DM$ ,  $\therefore DH=AH=2$ ,  $HP=2-5x$ ,

$\because \angle BAD=\angle MHA=90^\circ$ ,  $\therefore MH \parallel AG$ ,

$\therefore MH$  为  $\triangle ADG$  的中位线,  $\therefore MH=\frac{1}{2}AG=2x$ ,

在  $Rt\triangle PHM$  中,  $PM^2=PH^2+HM^2$ ,  $\therefore (5x)^2=(2x)^2+(2-5x)^2$ ,

解得  $x_1=\frac{5-\sqrt{21}}{2}$ ,  $x_2=\frac{5+\sqrt{21}}{2}$  (不合题意舍去),  $\therefore AP=\frac{25-5\sqrt{21}}{2}$ .



【点评】本题是相似形的综合题, 考查了矩形的性质, 折叠的性质, 勾股定理, 相似三角形的判定和性质, 熟练掌握相似三角形的判定和性质定理是解题的关键.