

2024 春季初一数学每日一题打卡 004

004 试题来源：2023 春无锡滨湖区校级月考第 16 题

将一副三角板如图 1 所示摆放，直线 $GH \parallel MN$ ，现将三角板 ABC 绕点 A 以每秒 1° 的速度顺时针旋转，同时三角板 DEF 绕点 D 以每秒 2° 的速度顺时针旋转，如图 2，设时间为 t 秒，当 $0 \leq t \leq 150$ 时，若边 BC 与三角板的一条直角边（边 DE ， DF ）平行，则所有满足条件的 t 的值为_____.

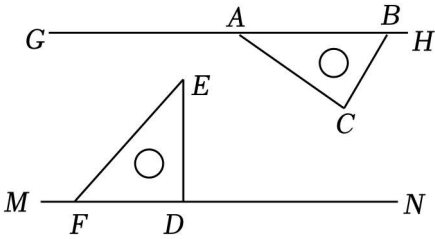


图1

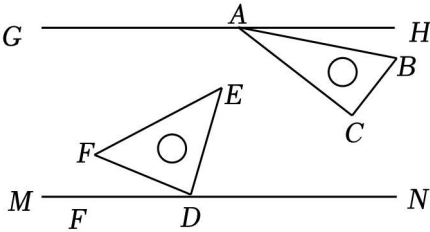


图2

试题解析

将一副三角板如图1所示摆放,直线 $GH \parallel MN$, 现将三角板 ABC 绕点 A 以每秒 1° 的速度顺时针旋转, 同时三角板 DEF 绕点 D 以每秒 2° 的速度顺时针旋转, 如图2, 设时间为 t 秒, 当 $0 \leq t \leq 150$ 时, 若边 BC 与三角板的一条直角边 (边 DE , DF) 平行, 则所有满足条件的 t 的值为 30° 或 120° .

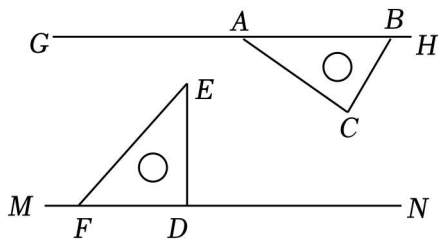


图1

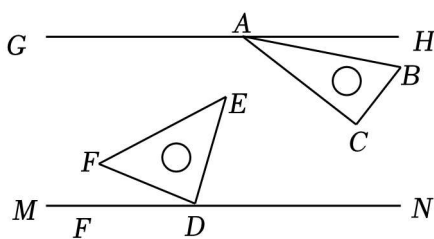


图2

【分析】根据题意得 $\angle HAC = \angle BAH + \angle BAC = t^\circ + 30^\circ$, $\angle FDM = 2t^\circ$,

(1) 如图1, 当 $DE \parallel BC$ 时, 延长 AC 交 MN 于点 P , 分两种情况讨论: ① DE 在 MN 上方时, ② DE 在 MN 下方时, $\angle FDP = 2t^\circ - 180^\circ$, 列式求解即可;

(2) 当 $DF \parallel BC$ 时, 延长 AC 交 MN 于点 I , ① DF 在 MN 上方时, $\angle FDN = 180^\circ - 2t^\circ$, ② DF 在 MN 下方时, $\angle FDN = 2t^\circ - 180^\circ$, 列式求解即可.

【解答】解: 由题意得, $\angle HAC = \angle BAH + \angle BAC = t^\circ + 30^\circ$, $\angle FDM = 2t^\circ$,

(1) 如图1, 当 $DE \parallel BC$ 时, 延长 AC 交 MN 于点 P ,

① DE 在 MN 上方时,

$\because DE \parallel BC$, $DE \perp DF$, $AC \perp BC$, $\therefore AP \parallel DF$,

$\therefore \angle FDM = \angle MPA$,

$\because MN \parallel GH$, $\therefore \angle MPA = \angle HAC$, $\therefore \angle FDM = \angle HAC$,

即 $2t^\circ = t^\circ + 30^\circ$, $\therefore t = 30$;

② DE 在 MN 下方时, $\angle FDP = 2t^\circ - 180^\circ$,

$\because DE \parallel BC$, $DE \perp DF$, $AC \perp BC$, $\therefore AP \parallel DF$, $\therefore \angle FDP = \angle MPA$,

$\because MN \parallel GH$, $\therefore \angle MPA = \angle HAC$, $\therefore \angle FDP = \angle HAC$, 即 $2t^\circ - 180^\circ = t^\circ + 30^\circ$,

$\therefore t = 210$ (不符合题意, 舍去),

(边解边总结, 由分类(1)可得, 解题核心是利用平行线的性质, 将角度关系转化到以 A, D 为顶点的角) why? 因为以 A, D 为顶点的所有角可以利用旋转时间的特征得出, 即可以用 t 表示出来.

(2) 当 $DF \parallel BC$ 时, 延长 AC 交 MN 于点 I , (如图2)

① DF 在 MN 上方时, $\angle FDN = 180^\circ - 2t^\circ$,

$\because DF \parallel BC$, $AC \perp BC$, $\therefore AI \perp DF$,

$\therefore \angle FDN + \angle MIA = 90^\circ$,

$\because MN \parallel GH$, $\therefore \angle MIA = \angle HAC$, $\therefore \angle FDN + \angle HAC = 90^\circ$,

即 $180^\circ - 2t^\circ + t^\circ + 30^\circ = 90^\circ$, $\therefore t = 120$;

② DF 在 MN 下方时, $\angle FDN = 2t^\circ - 180^\circ$,

$\because DF \parallel BC$, $AC \perp BC$, $DE \perp DF$, $\therefore AC \parallel DE$,

$\therefore \angle AIM = \angle MDE$,

$\because MN \parallel GH$, $\therefore \angle MIA = \angle HAC$, $\therefore \angle MDE = \angle HAC$, 即 $2t^\circ - 180^\circ - 90^\circ = t^\circ + 30^\circ$,

$\therefore t = 300$ (不符合题意, 舍去),

综上, 所有满足条件的 t 的值为 30° 或 120° .

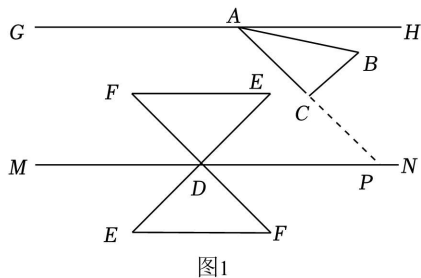


图1

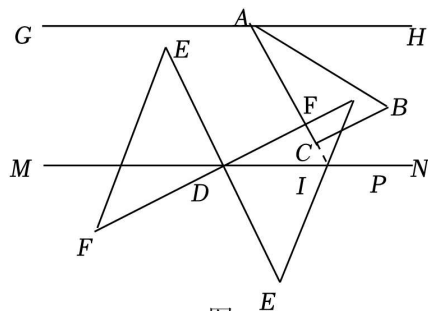


图2

思考: 两个不符合题意的是为什么? 什么情况下不需要舍去? 什么情况下需要舍去?

是否可以在刚开始解题的时候直接排除这两种情况?