2024春季初三数学每日一题005

005 试题来源：2023• 余姚市二模

【基础巩固】如图1，P是$\angle ABC$内部一点，在射线BP上取点D、E，使得$\angle CEP=\angle ADP=\angle ABC$．求证：$\triangle ABD\backsim\triangle BCE$；

【尝试应用】如图2，在$Rt\triangle ABC$中，$\angle BAC=90^{\circ}$，$AB=AC$，D是AC上一点，连接BD，在BD上取点E、F，连接CE、AF，使得$\angle AFD=\angle CED=45^{\circ}$．若$BF=2$，求$CE$的长；

【拓展提高】如图3，在$Rt\triangle ABC$中，$\angle BAC=90^{\circ}$，$\angle ACB=30^{\circ}$，D是AC上一点，连接BD，在BD上取点E，连接CE．若$\angle CED=60^{\circ}$，$\dfrac{BE}{DE}=\dfrac{8}{5}$，求$\angle BCE$的正切值．

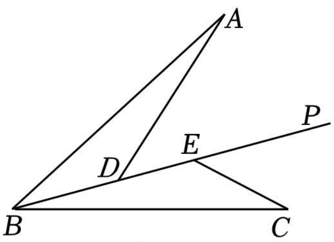


图1

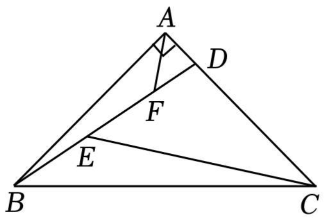


图2

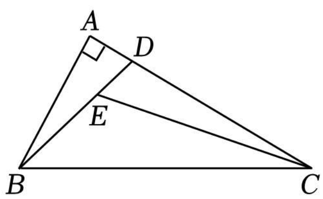


图3

试题解析

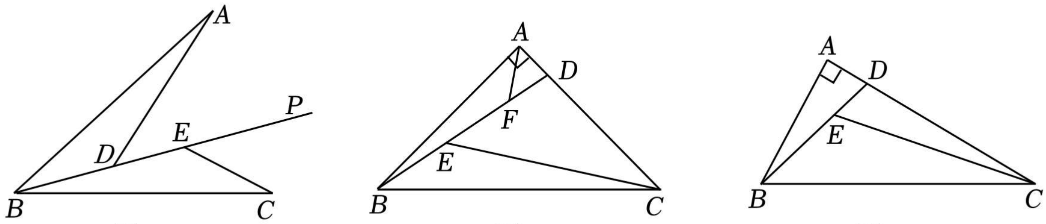


图1　　图2　　图3

【基础巩固】如图1，P 是 $\angle ABC$ 内部一点，在射线 BP 上取点 D、E，使得 $\angle CEP=\angle ADP=\angle ABC$．求证：$\triangle ABD\backsim\triangle BCE$；

证明：$\because \angle ABD+\angle CBE=\angle ABC$，$\angle ABD+\angle BAD=\angle ADP$，$\angle ABC=\angle ADP$，

$\therefore \angle CBE=\angle BAD$，

又 $\because \angle ADB=180^\circ-\angle ADP$，$\angle BEC=180^\circ-\angle CEP$，$\angle ADP=\angle CEP$，

$\therefore \angle ADB=\angle BEC$，$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle BCE$．

【尝试应用】如图2，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=AC$，D 是 AC 上一点，连接 BD，在 BD 上取点 E、F，连接 CE、AF，使得 $\angle AFD=\angle CED=45^\circ$．若 $BF=2$，求 CE 的长；

【分析】根据等腰直角三角形的性质可得 $\angle ABC=\angle ACB=45^\circ$，$BC=\sqrt{2}AB$，再推导 $\triangle BEC\backsim\triangle AFB$，然后利用等腰三角形的性质得到 $\frac{CE}{BF}=\frac{BC}{AB}=\sqrt{2}$，计算解题；

【解答】$\because \angle BAC=90^\circ$，$AB=AC$，$\therefore \angle ABC=\angle ACB=45^\circ$，$BC=\sqrt{2}AB$，

即：$\angle ABF+\angle CBE=\angle ABC=45^\circ$，

又 $\because \angle ABF+\angle BAF=\angle AFD=45^\circ$，$BC=\sqrt{2}AB$，$\angle ABF+\angle BAF=\angle AFD=45^\circ$．

$\therefore \angle CBE=\angle BAF$，

又 $\because \angle AFB=180^\circ-\angle AFD=135^\circ$，$\angle BEC=180^\circ-\angle CED=135^\circ$，

$\therefore \angle BEC=\angle AFB$，$\therefore \triangle BEC\backsim\triangle AFB$，$\therefore \frac{CE}{BF}=\frac{BC}{AB}=\sqrt{2}$，$\therefore CE=\sqrt{2}BF=2\sqrt{2}$，

故 CE 的长为：$2\sqrt{2}$．

【拓展提高】如图3，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，$\angle ACB=30^\circ$，D 是 AC 上一点，连接 BD，在 BD 上取点 E，连接 CE．若 $\angle CED=60^\circ$，$\frac{BE}{DE}=\frac{8}{5}$，求 $\angle BCE$ 的正切值．

【分析】如图所示，在 BD 上取点 F，使 $\angle AFD=60^\circ$，作 $AG\perp BD$ 于点 G，则可得到 $\triangle AFB\backsim\triangle BE$，即 $\frac{AB}{BC}=\frac{AF}{BE}=\frac{1}{2}$，$\angle BCE=\angle ABF$，进而证明 $\triangle ABG\backsim\triangle DAG$，得到 $AG^2=DG\cdot BG$，设 $BE=8t$，可以求出 $BG=12t$ 解题即可．

【解答】如图所示，在 BD 上取点 F，使 $\angle AFD=60^\circ$，作 $AG\perp BD$ 于点 G，

$\because \angle BAC=90^\circ$，$\angle ACB=30^\circ$，

$\therefore \angle ABC=60^{\circ}$, $AB=\frac{1}{2}BC$.

即: $\angle ABF+\angle CBE=\angle ABC=60^{\circ}$,

又$\because \angle ABF+\angle BAF=\angle AFD=60^{\circ}$,

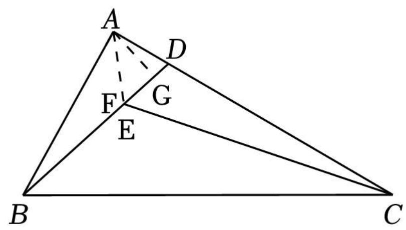
$\therefore \angle BAF=\angle CBE$,

又 $\angle AFB=180^{\circ}-\angle AFD=120^{\circ}$, $\angle BEC=180^{\circ}-\angle CED=120^{\circ}$,

$\therefore \angle AFB=\angle BEC$, $\therefore \triangle AFB\backsim\triangle BE$,

$\therefore \frac{AB}{BC}=\frac{AF}{BE}=\frac{1}{2}$, $\angle BCE=\angle ABF$, $\therefore AF=\frac{1}{2}BE$,

$\because \frac{BE}{DE}=\frac{8}{5}$, $\therefore$ 令 $BE=8t$, 则 $DE=5t$,



$\therefore AF=\frac{1}{2}BE=4t$,

又$\because \angle AFD=60^{\circ}$, $FG\perp DF$

$\therefore$ 在 $Rt\triangle AFG$ 中, $\angle FAG=30^{\circ}$,

$\therefore FG=\frac{1}{2}AF=2t$,

由勾股定理可得: $AG=\sqrt{AF^{2}-FG^{2}}=2\sqrt{3}t$,

又$\because \angle ABG+\angle BAG=180^{\circ}-\angle AGB=90^{\circ}$, $\angle BAG+\angle DAG=\angle BAC=90^{\circ}$,

$\therefore \angle ABG=\angle DAG$, $\therefore \triangle ABG\backsim\triangle DAG$,

$\therefore \frac{AG}{DG}=\frac{BG}{AG}$, $\therefore AG^{2}=DG\cdot BG$,

设 $EF=x$, 则 $BG=10t+x$, $DG=DE-EF-FG=3t-x$.

$\therefore (2\sqrt{3}t)^{2}=(10t+x)(3t-x)$,

解得: $x=2t$, $\therefore BG=12t$,

$\therefore tan\angle ABG=tan\angle BCE=\frac{2\sqrt{3}t}{12t}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

故 $\angle BCE$ 的正切值为: $\frac{\sqrt{3}}{6}$.