

2024 春季初二数学每日一题打卡 005

005 试题来源: 姑苏区月考第 25 题

如图 1, 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 15$, $BC = 20$, 将矩形 $ABCD$ 绕着点 A 顺时针旋转, 得到矩形 $BEFG$.

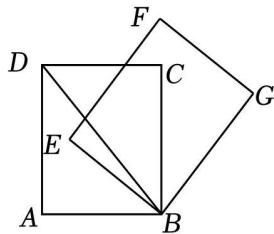


图1

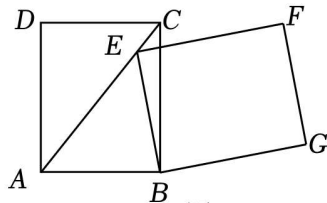


图2

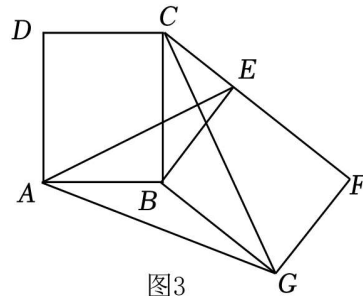


图3

- (1) 当点 E 落在 BD 上时, 则线段 DE 的长度等于 _____;
- (2) 如图 2, 当点 E 落在 AC 上时, 求 $\triangle BCE$ 的面积;
- (3) 如图 3, 连接 AE 、 CE 、 AG 、 CG , 判断线段 AE 与 CG 的位置关系且说明理由, 并求 $CE^2 + AG^2$ 的值;
- (4) 在旋转过程中, 请直接写出 $S_{\triangle BCE} + S_{\triangle ABG}$ 的最大值.

【解答】

解：(1) 如图1， \because 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AD = BC = 20$ ， $\angle A = 90^\circ$ ，

在 $Rt\triangle BAD$ 中，由勾股定理， $BD = 25$ ，

由旋转， $BE = AB = 15$ ， $\therefore DE = BD - BE = 10$ ，

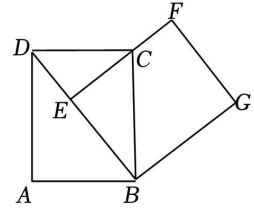


图1

(2) 如图2，在 $Rt\triangle ABC$ 中，根据勾股定理得， $AC = 25$ ，

由旋转得， $BE = AB$ ，过点 B 作 $BM \perp AC$ 于 M ， $\therefore AE = 2AM$ ，

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2}AC \cdot BM$ ，

$\therefore BM = \frac{AB \cdot BC}{AC} = 12$ ，

在 $Rt\triangle ABM$ 中，根据勾股定理得，

$AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = 9$ ， $\therefore AE = 18$ ，

$\therefore S_{\triangle BCE} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}AB \cdot BC - \frac{1}{2}AE \cdot BM$

$= \frac{1}{2} \times 15 \times 20 - \frac{1}{2} \times 18 \times 12 = 42$ ；

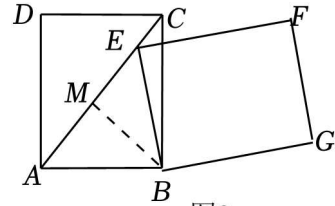


图2

(3) $AE \perp CG$ ，理由：如图3，

AE 与 BC 的交点记作点 P ， AE 与 CG 的交点记作 Q ，

由旋转知， $\angle ABE = \angle CBG$ ，由旋转知， $AB = BE$ ，

$\therefore \angle BAE = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ABE) = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle CBG)$ ，

由旋转知， $BC = BG$ ， $\therefore \angle BCG = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle CBG)$ ，

$\therefore \angle BAE = \angle BCG$ ，

$\therefore \angle APB = \angle CPE$ ， $\therefore \angle CQP = \angle ABC = 90^\circ$ ，

$\therefore AE \perp CG$ ；

连接 AC ， EG ，由旋转知， $BE = AB = 15$ ， $BG = BC = 20$ ，

在 $Rt\triangle AQC$ 中， $AQ^2 + CQ^2 = AC^2 = 625$ ，在 $Rt\triangle BEG$ 中， $BE^2 + BG^2 = EG^2 = 625$ ，

在 $Rt\triangle CQE$ 中， $CE^2 = CQ^2 + QE^2$ ，在 $Rt\triangle AQG$ 中， $AG^2 = AQ^2 + GQ^2$ ，

$\therefore CE^2 + AG^2 = CQ^2 + QE^2 + AQ^2 + GQ^2 = AC^2 + EG^2 = 1250$ ；

(4) 如图4，延长 AB 至 E' ，使 $BE' = BE$ ，连接 GE' ，

过点 G 作 $GH \perp AB$ 于 H ，

$\therefore AE' = AB + BE' = 30$ ，

$\therefore \angle EBG = \angle CBE' = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle CBE = \angle GBE'$ ，

由旋转知， $BC = BG$ ，

$\therefore \triangle BCE \cong \triangle BGE'$ (SAS)，

$\therefore S_{\triangle BCE} = S_{\triangle BGE'}$ ，

$\therefore S_{\triangle BCE} + S_{\triangle ABG} = S_{\triangle BGE'} + S_{\triangle ABG} = S_{\triangle AE'G} = \frac{1}{2}AE' \cdot GH = 15GH$ ，

要使 $S_{\triangle BCE} + S_{\triangle ABG}$ 的最大，则 GH 最大，而 GH 最大 $= BG = 20$ ，

即 $S_{\triangle BCE} + S_{\triangle ABG}$ 的最大为 300。

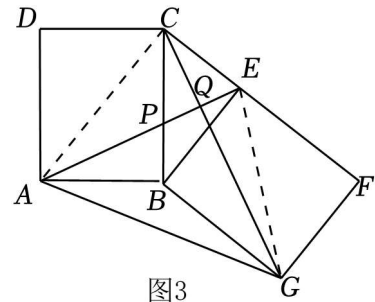


图3

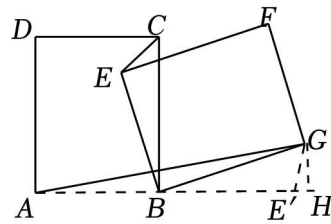


图4