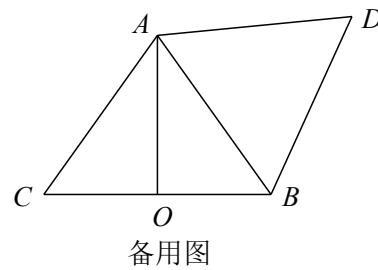
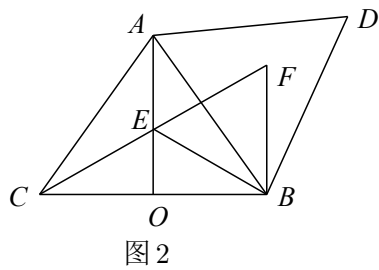
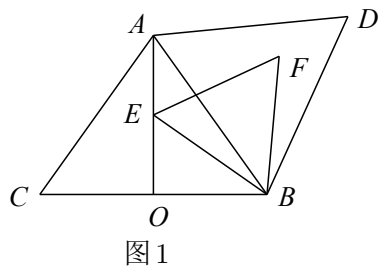


2024 春季初二数学每日一题打卡 006

如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $AO \perp BC$ 于点 O , $AB=5$, $BC=6$, 在 $\triangle ABC$ 的外部以 AB 为边作等边 $\triangle ABD$, 点 E 是线段 AO 所在直线上的一动点 (点 E 不与点 A 重合), 将线段 BE 绕点 B 顺时针方向旋转 60° 得到线段 BF , 连接 EF .

- (1) 求 AO 的长;
- (2) 如图 2, 当点 E 在线段 AO 上, 且点 F, E, C 三点在同一条直线上时, 求 BF 的长;
- (3) 连接 DF , 若 $\triangle BDF$ 的面积为 3, 请直接写出 BF 的长.



试题解析

(1) 求 AO 的长;

【分析】(1) $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB=AC, AO \perp BC \Rightarrow BO=CO=3$ (三线合一性质) $\Rightarrow AO=4$;

解: (1) $\because AB=AC, AO \perp BC, \therefore BO=CO=\frac{1}{2}BC=3,$

$\therefore AO=\sqrt{AB^2-BO^2}=\sqrt{25-9}=4;$

(2) 如图 2, 当点 E 在线段 AO 上, 且点 F, E, C 三点在同一条直线上时, 求 BF 的长;

【分析】(2) 条件 " F, E, C 三点在同一条直线上" 属于动点 E 的特殊位置, 要体会特殊在哪里?

方法: 作对比, 体会特殊位置的特殊性, 如下图 3, 前提: 联想到 EB 和 EC 始终是相等关系.

特殊性: 特殊在通过等边 $\triangle BEF$ 以及 $\angle FEB$ 是 $\triangle BCE$ 的外角

(F, E, C, B 构成 \triangle) 可得出 $\angle ECB = \angle EBC = 30^\circ$,

从而 $\angle FBC = 90^\circ$.

在 $Rt\triangle CBF$ 中, $\angle FCB = 30^\circ, BC = 6$, 可求 BF

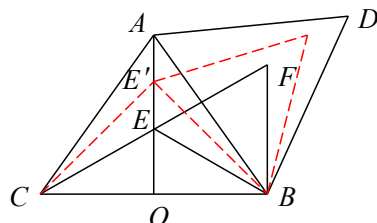


图 3

【解答】(2) \because 将线段 BE 绕点 B 顺时针方向旋转 60° 得到线段 BF ,

$\therefore BE=BF, \angle EBF=60^\circ, \therefore \triangle BEF$ 是等边三角形, $\therefore BE=BF=EF, \angle F=\angle FEB=\angle EBF=60^\circ$,

$\because AB=AC, AO \perp BC, \therefore AO$ 是 BC 的中垂线, $\therefore BE=CE, \therefore \angle ECB=\angle EBC=30^\circ$,

$\therefore \angle CBF=90^\circ, \therefore BC=\sqrt{3}BF=6, \therefore BF=2\sqrt{3};$

(3) 连接 DF , 若 $\triangle BDF$ 的面积为 3, 请直接写出 BF 的长.

【分析】(3) 从条件 " $\triangle BDF$ 的面积为 3" 开始分析: $\triangle BDF$ 中, $BD=5$, 属于定边, 则找面积的话用底高法.

如图 3, 由面积和底边 BD , 可得点 F 到 BD 的距离为 $\frac{6}{5}$, 点 F 是动点, 由点 E 通过旋转得到, 故要先找下点 F 的运动轨迹.

由题目条件特征 $\begin{cases} \text{等边 } \triangle ABD \\ \text{等边 } \triangle BEF \end{cases} \Rightarrow$ 联想手拉手全等模型 $\Rightarrow \triangle ABE \cong \triangle DFB$

$\Rightarrow \angle BAE = \angle FDB$ (定角) \Rightarrow 点 F 的轨迹即为如图的直线 l (这样可知点 F 有两个位置满足题意).

情况①, 如图 4

转化思想: 根据 $\triangle ABE \cong \triangle DFB \Rightarrow FH = EG = \frac{6}{5}$

问题转化为 $\triangle ABO$ 中, 由 $EG = \frac{6}{5}$ 求 BE

垂线段已知或求垂线段方法: 等积

故由 $S_{\triangle ABE} = 3, S_{\triangle ABO} = 6 \Rightarrow OE = AE = 2 \Rightarrow$

$BE = BF = \sqrt{13}$

情况②, 如图 5, 同理, 可转化 $E_2Q = \frac{6}{5}$

此时 $\triangle E_2QA \cong \triangle E_1GA \Rightarrow E_1A = E_2A = 2$

$BF_2 = 3\sqrt{5}$

综上, $BF = 3\sqrt{5}$ 或 $\sqrt{13}$

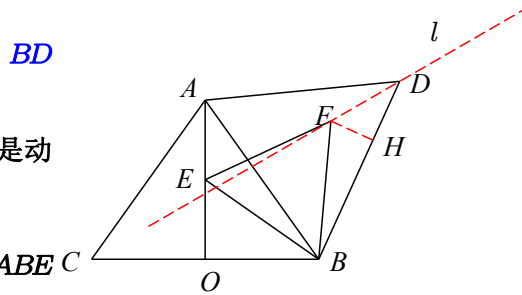


图 3

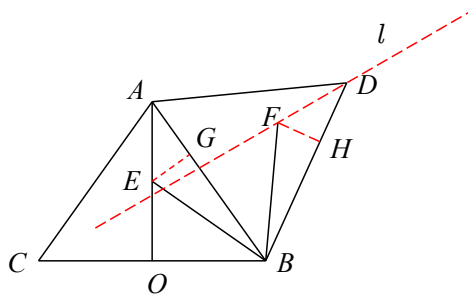


图 4

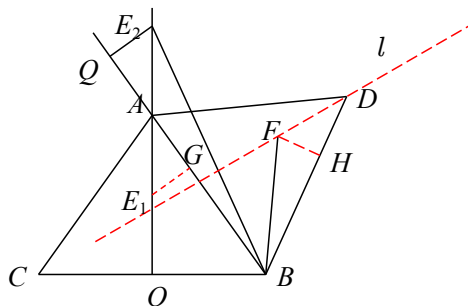


图 5