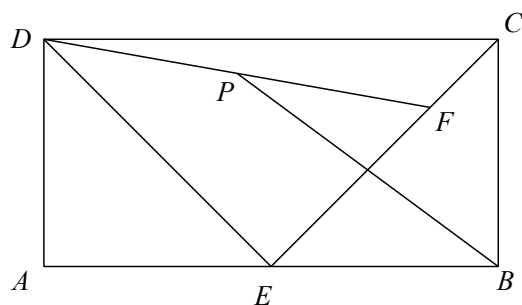


## 2024 春季初二数学每日一题打卡 008

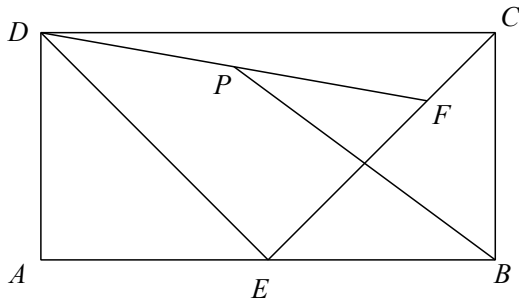
试题来源：2022 工业园区校级期末

如图，矩形  $ABCD$  中， $AB=6$ ， $AD=3$ ， $E$  为  $AB$  的中点， $F$  为  $EC$  上一动点， $P$  为  $DF$  中点，连接  $PB$ ，则  $PB$  的最小值是\_\_\_\_\_.



试题解析：

如图，矩形  $ABCD$  中， $AB=6$ ， $AD=3$ ， $E$  为  $AB$  的中点， $F$  为  $EC$  上一动点， $P$  为  $DF$  中点，连接  $PB$ ，则  $PB$  的最小值是  $3\sqrt{2}$ 。



【解答】解：当点  $F$  与点  $C$  重合时，点  $P$  在  $P_1$  处， $CP_1=DP_1$ ，

当点  $F$  与点  $E$  重合时，点  $P$  在  $P_2$  处， $EP_2=DP_2$ ，

$\therefore P_1P_2 \parallel CE$  且  $P_1P_2 = \frac{1}{2}CE$ ，

当点  $F$  在  $EC$  上除点  $C$ 、 $E$  的位置处时，有  $DP=FP$ ，

由中位线定理可知： $P_1P \parallel CE$  且  $P_1P = \frac{1}{2}CF$ ，

$\therefore$  点  $P$  的运动轨迹是线段  $P_1P_2$ ，如图所示，

$\therefore$  当  $BP \perp P_1P_2$  时， $PB$  取得最小值，

$\because$  四边形  $ABCD$  是矩形，

$\therefore AD=BC=3$ ， $AB=CD=6$ ，

$\angle DAB=\angle BCD=\angle ABC=90^\circ$ ，

$\therefore CP_1 = \frac{1}{2}CD=3$ ，

$\because E$  为  $AB$  的中点， $\therefore AE=BE=\frac{1}{2}AB=3$ ，

连接  $BP_1$ 、 $BP_2$ ，作  $BP' \perp P_1P_2$  于  $P'$ ，作  $P_2Q \perp AB$  于  $Q$ ，

则  $BP$  的最小值为  $BP'$  的长， $P_2Q$  是  $\triangle EAD$  的中位线，

$\therefore P_2Q = \frac{1}{2}AD = \frac{3}{2}$ ， $QE=AQ=\frac{1}{2}AE=\frac{3}{2}$ ， $\therefore BQ=BE+QE=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$ ，

在  $Rt\triangle BP_2Q$  中，由勾股定理得：

$$BP_2 = \sqrt{BQ^2 + P_2Q^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{10}}{2}，$$

在  $Rt\triangle CBE$  中，由勾股定理得： $CE = \sqrt{BE^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ ，

$\therefore P_1P_2 = \frac{1}{2}CE = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ，

在  $Rt\triangle BCP_1$  中，由勾股定理得： $BP_1 = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ ，

设  $P'P_2 = x$ ，则  $P'P_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2} - x$ ，

由勾股定理得： $BP_2^2 - P'P_2^2 = BP_1^2 - P'P_1^2$ ，

即  $\left(\frac{3\sqrt{10}}{2}\right)^2 - x^2 = (3\sqrt{2})^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - x\right)^2$ ，解得： $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ，

$\therefore BP'^2 = \left(\frac{3\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 18$ ，

$\therefore BP' = 3\sqrt{2}$ 。

故答案为： $3\sqrt{2}$ 。

