2024春季初三数学每日一题打卡010

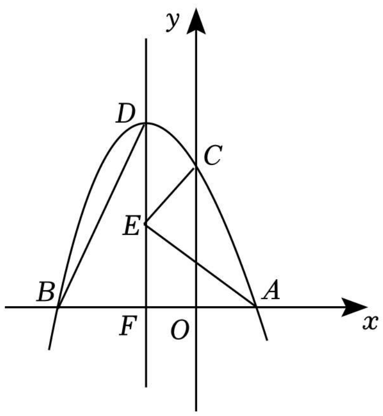
010试题来源：2023春常州模拟

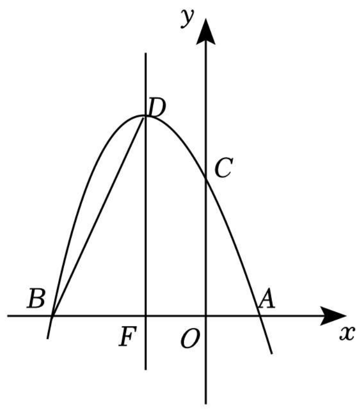
如图，抛物线 $y=-x^2-2x+3$ 与 x 轴交于 A，B 两点（A 在 B 的右侧），与 y 轴交于点 C，顶点为 D. 抛物线对称轴与 x 轴交于点 F，E 是对称轴上的一个动点.

(1) 若 $CE\parallel BD$，求 $\sin\angle DEC$ 的值；

(2) 若 $\angle BCE=\angle BDF$，求点 E 的坐标；

(3) 当 $AE+\dfrac{\sqrt{5}}{5}DE$ 取得最小值时，连接并延长 AE 交抛物线于点 M，请直接写出 AM 的长度.





备用图

试题解析

(1) 若 $CE \parallel BD$，求 $\sin\angle DEC$ 的值；

解：(1) 令 $y=0$ 时，$-x^2-2x+3=0$，解得 $x_1=1$，$x_2=-3$，$\therefore A(1,0)$，$B(-3,0)$．

把 $x=0$ 代入 $y=-x^2-2x+3$ 中，得 $y=3$，即 $C(0,3)$．

$\because y=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$，$\therefore$ 对称轴是直线 $x=-1$，顶点 $D(-1,4)$，

$\therefore BF=2$，$DF=4$，$BD=\sqrt{(3-1)^2+4^2}=2\sqrt{5}$．

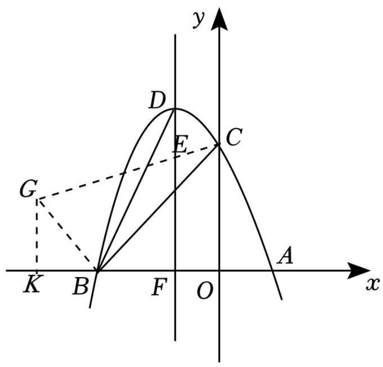
$\because CE \parallel BD$，$\therefore \angle BDE=\angle DEC$，

在 $Rt\Delta BDF$ 中，$\sin\angle DEC=\sin\angle BDF=\dfrac{BF}{BD}=\dfrac{2}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$；

(2) 若 $\angle BCE=\angle BDF$，求点 E 的坐标；

(2) 分两种情况进行解答：①当 E 在 BC 上方时，②当 E 在 BC 下方时，根据相似三角形的判定和性质分别求解即可；

(2) ①如图，当 E 在 BC 上方时，



连接 BC，作 $BG\perp BC$，交 CE 的延长线于点 G，作 $GK\perp x$ 轴于点 x，

$\because \angle BCE=\angle BDF$，$\angle BFD=\angle GBC$，$\therefore \Delta BCG\backsim\Delta FDB$，

$\therefore \dfrac{GB}{BC}=\dfrac{BF}{FD}=\dfrac{1}{2}$，

$\because \angle GBC=\angle COB=90^\circ$，$OB=OC$，$\therefore \angle OBC=\angle BCO=45^\circ$，

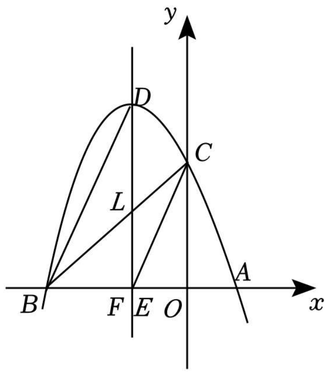
$\because \angle GKB=\angle BOC=90^\circ$，$\therefore \Delta GKB\backsim\Delta BOC$，

$\therefore \dfrac{GK}{BO}=\dfrac{BK}{CO}=\dfrac{GB}{BC}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore BK=\dfrac{3}{2}$，$GK=\dfrac{3}{2}$，

$\therefore G\left(-\dfrac{9}{2},\dfrac{3}{2}\right)$，$\therefore GC$ 的函数表达式为 $y=\dfrac{1}{3}x+3$，

当 $x=-1$ 时，$y=\dfrac{8}{3}$，$\therefore$ 点 E 的坐标为 $\left(-1,\dfrac{8}{3}\right)$；

②如图，当 E 在 BC 下方时，设 BC 与 DF 交于点 L，



$\because \angle BCE=\angle BDF$，$\angle BLD=\angle ELC$，$\therefore \Delta BLD\backsim\Delta ELC$，

$\therefore \dfrac{EL}{BL}=\dfrac{CL}{DL}$，

$\because B(-3,0)$，$C(0,3)$，$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y=x+3$，$\therefore L(-1,2)$，

$\therefore DL=2$，$CL=\sqrt{1^2+(3-2)^2}=\sqrt{2}$，$BL=\sqrt{(3-1)^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

$\therefore \dfrac{EL}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore EL=2$，$\therefore E(-1,0)$．

综上，点 E 的坐标为 $\left(-1,\dfrac{8}{3}\right)$ 或 $(-1,0)$；

(3) 当 $AE+\dfrac{\sqrt{5}}{5}DE$ 取得最小值时，连接并延长 AE 交抛物线于点 M，请直接写出 AM 的长度．

(3) 胡不归，要点时转化 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}DE$

(3) $AM=\dfrac{7\sqrt{5}}{4}$，理由如下：

如图 2，过点 A 作 $AH\perp DB$ 于点 H，交对称轴于点 E，连接 AE 并延长交第二象限抛物线为点 M，

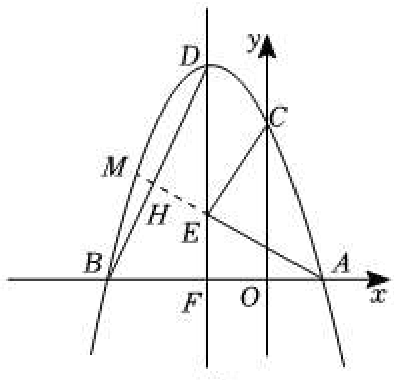


图2

在 $Rt\Delta DHE$ 中，$\sin\angle HDE=\dfrac{HE}{DE}$，

$\therefore HE=\sin\angle HDE\cdot DE=\dfrac{\sqrt{5}}{5}DE$．

$\therefore AE+\dfrac{\sqrt{5}}{5}DE=AE+HE$．

$\therefore$ 要 $AE+\dfrac{\sqrt{5}}{5}DE$ 取得最小值，即要 $AE+HE$ 最小，

$\therefore$ 当点 A, E, H 三点共线且 AH 垂直 BD 时 $AE+HE$ 最小,

此时 $AE+\frac{\sqrt{5}}{5}DE$ 最小.

在 $Rt\Delta DHE$, $Rt\Delta EFA$ 中, $\angle HDE=\angle FAE$,

$\therefore \tan\angle BDE=\tan\angle FAE=\frac{2}{4}=\frac{EF}{AF}=\frac{EF}{2}$.

$\therefore EF=1$, 即 $E(-1,1)$.

$\because A(1,0)$,

$\therefore$ 可求得 AE 的解析式为: $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

联立 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 和抛物线 $y=-x^2-2x+3$,

解得 $M\left(-\frac{5}{2},\frac{7}{4}\right)$.

$\therefore AM=\frac{7\sqrt{5}}{4}$.