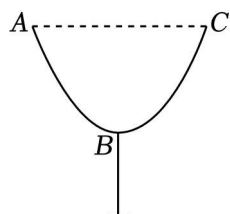


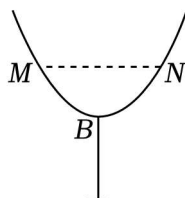
2024 春季初三数学每日一题打卡 020

试题来源:2023 南京市建邺区二模

某酒杯的轴截面如图①所示,其中杯体轴截面 ABC 呈曲线形状(忽略杯体的厚度). 点 A 、 C 在杯口处, $AC=12\text{cm}$, 点 B 是曲线上的最低点. 当酒杯装满液体时,液体最大深度(最低点 B 到 AC 的距离)是 4cm . 将杯中的液体倒出一部分后,液体的最大深度(最低点 B 到 MN 的距离)恰好为 2cm , 如图②所示.



图①



图②

- (1) 如果杯体轴截面 ABC 呈抛物线形状, 求此时 MN 的长度;
- (2) 如果杯体轴截面 ABC 呈双曲线形状, 求此时 MN 的长度.

试题解析：

某酒杯的轴截面如图①所示，其中杯体轴截面 ABC 呈曲线形状（忽略杯体的厚度）。点 A 、 C 在杯口处， $AC=12\text{cm}$ ，点 B 是曲线上的最低点。当酒杯装满液体时，液体最大深度（最低点 B 到 AC 的距离）是 4cm 。将杯中的液体倒出一部分后，液体的最大深度（最低点 B 到 MN 的距离）恰好为 2cm ，如图②所示。

(1) 如果杯体轴截面 ABC 呈抛物线形状，求此时 MN 的长度；

【解答】解：建立如图所示的直角坐标系，设 $y=ax^2$ ，

you

将 $C(6,4)$ 代入 $y=ax^2$ ，

解得 $a=\frac{1}{9}$ ，

$\therefore y=\frac{1}{9}x^2$ ，

$y=\frac{1}{9}x^2$ 中，令 $y=2$ ，

解得 $x=\pm 3\sqrt{2}$ 。

$\therefore MN=6\sqrt{2}$ 。

(2) 如果杯体轴截面 ABC 呈双曲线形状，求此时 MN 的长度。

【解答】解：建立如图所示的直角坐标系，设 $y=\frac{k}{x}$ ，

在 $Rt\triangle AEC$ 中， D 为 AC 中点， $AC=12$ ， $AE=CE=6\sqrt{2}$ ， $ED=6$ 。

$\therefore BD=4$ ，

$\therefore EB=2$ 。

根据对称性，设点 B 的坐标为 (a,a) 。

则点 A 的坐标为 $(a-\sqrt{2}, a+5\sqrt{2})$ 。

$\therefore k=a \times a = (a-\sqrt{2})(a+5\sqrt{2})$

解得 $a=\frac{5\sqrt{2}}{4}$ ， $k=\frac{25}{8}$

$\therefore y=\frac{25}{8x}$ 。

在 $Rt\triangle MEN$ 中， G 为 MN 中点， $BG=2$ ，

根据对称性，设点 M 、 N 的坐标分别为 (x,y) ， (y,x) 。

\therefore 点 G 的坐标为 $(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2})$ ，点 E 的坐标为 (x,x) ，

$\therefore EN=y-x$

\therefore 点 B 的坐标为 $(\frac{5}{4}\sqrt{2}, \frac{5}{4}\sqrt{2})$ ，

$\therefore BG^2=(x_G-x_B)^2+(y_G-y_B)^2=4$

整理得 $(\frac{x+y}{2}-\frac{5}{4}\sqrt{2})^2=2$

$\therefore \frac{x+y}{2}-\frac{5}{4}\sqrt{2}=\sqrt{2}$ ，

$\therefore (x+y)^2=\frac{81}{2}$ ，

$\therefore (x-y)^2=(x+y)^2-4xy=\frac{81}{2}-\frac{25}{2}=28$ ，

即 $EN=2\sqrt{7}$ ，

$\therefore MN=2\sqrt{7} \cdot \sqrt{2}=2\sqrt{14}$ 。

