

2024 春季初二数学每日一题打卡 025

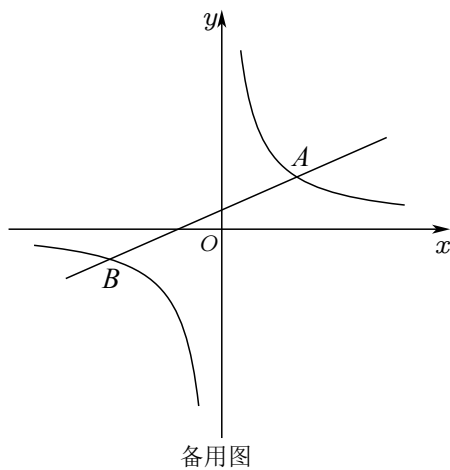
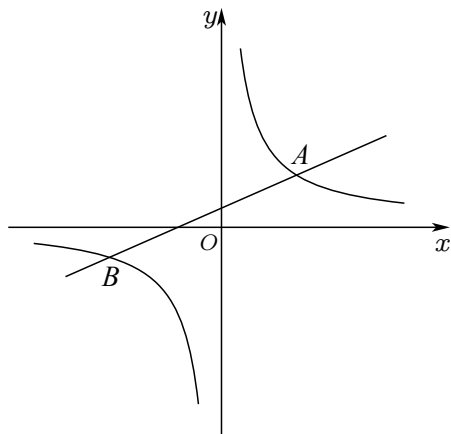
025 试题来源：泰州海陵校级期末

如图，一次函数 $y = \frac{1}{2}x + b$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象交于点 $A(4, a)$ 、 $B(-8, -2)$ 。

(1) 求 k 、 a 、 b 的值；

(2) 求关于 x 的不等式 $\frac{1}{2}x + b > \frac{k}{x}$ 的解集；

(3) 若点 P 在 y 轴上，点 Q 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上，且 A 、 B 、 P 、 Q 恰好是一个平行四边形的四个顶点，试求点 P 的坐标。



试题解析

如图,一次函数 $y = \frac{1}{2}x + b$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象交于点 $A(4, a)$ 、 $B(-8, -2)$.

(1) 求 k 、 a 、 b 的值;

(2) 求关于 x 的不等式 $\frac{1}{2}x + b > \frac{k}{x}$ 的解集;

(3) 若点 P 在 y 轴上,点 Q 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上,且 A 、 B 、 P 、 Q 恰好是一个平行四边形的四个顶点,试求点 P 的坐标.

【解答】解: (1) \because 一次函数 $y = \frac{1}{2}x + b$ 的图象过点 $B(-8, -2)$, $\therefore -2 = -4 + b$, $\therefore b = 2$.

\because 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象过点 $B(-8, -2)$, $\therefore k = (-8) \times (-2) = 16$.

当 $x = 4$ 时, $a = \frac{16}{x} = 4$, \therefore 点 A 的坐标为 $(4, 4)$.

(2) 观察函数图象,可知:

当 $-8 < x < 0$ 或 $x > 4$ 时,一次函数 $y = \frac{1}{2}x + 2$ 的图象在反比例函数 $y = \frac{16}{x}$ 的图象上方,

\therefore 不等式 $\frac{1}{2}x + b > \frac{k}{x}$ 的解集为 $-8 < x < 0$ 或 $x > 4$.

(3) 设点 P 的坐标为 $(0, m)$,点 Q 的坐标为 $(n, \frac{16}{n})$. 分两种情况考虑:

① AQ 为对角线,如图 1 所示:

当四边形 AP_1Q_1B 为平行四边形时, $\begin{cases} 4 + n = 0 - 8 \\ 4 + \frac{16}{n} = m - 2 \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} n = -12 \\ m = \frac{14}{3} \end{cases}$,

\therefore 点 P_1 的坐标为 $(0, \frac{14}{3})$;

② AP 为对角线,如图 2 所示:

当四边形 ABP_2Q_2 为平行四边形时, $\begin{cases} 4 + 0 = -8 + n \\ 4 + m = -2 + \frac{16}{n} \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} n = 12 \\ m = -\frac{14}{3} \end{cases}$,

\therefore 点 P_2 的坐标为 $(0, -\frac{14}{3})$;

③ AB 为对角线,如图 3 所示:

\because 四边形 $APBQ$ 为平行四边形,

$\therefore \begin{cases} 4 - 8 = 0 + n \\ 4 - 2 = n + \frac{16}{n} \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} n = -4 \\ m = 6 \end{cases}$, \therefore 点 P 的坐标为 $(0, 6)$.

综上所述:当 A 、 B 、 P 、 Q 恰好是一个平行四边形的四个顶点时,

点 P 的坐标为 $(0, \frac{14}{3})$, $(0, -\frac{14}{3})$ 或 $(0, 6)$.

