2024春季初一数学每日一题打卡025

025试题来源：南京秦淮区期中变式

问题情境数学活动课上，老师提出了如下问题：如图，在ΔABC中，$AB=AC$，P是BC上一点，过点P作$PD\perp AB$，$PE\perp AC$，垂足分别为D，E，过点B作$BF\perp AC$，垂足为F，连接AP.

【特例探究】

(1) 如图1，当P为BC边的中点时，利用面积之间的关系可以发现线段PD，PE，BF之间的数量关系为__________.

【深入探究】

(2) 如图2，当P为BC边上的任意一点时，(1)中的数量关系是否仍然成立？若成立，请加以证明；若不成立，请写出成立的数量关系，并说明理由.

【拓展探究】

(3) 如图3，当点P在BC边的延长线上时，

①试猜想线段PD，PE，BF之间的数量关系，并证明你的猜想.

②当$S_{\Delta ABC}=10$，$AB=5$，$PE=2$时，线段PD的长为__________.

【变化一下】

(4) 如图4，ΔABC满足$AB=AC=BC$，点P为ΔABC内任意一点，过点P分别作$PD\perp AB$，$PE\perp AC$，$PF\perp BC$，垂足分别为D、E、F，请直接写出PD、PE、PF和BG之间的关系.

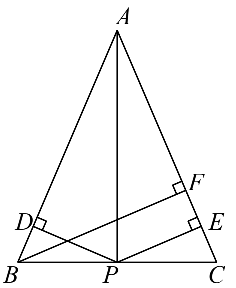

图1

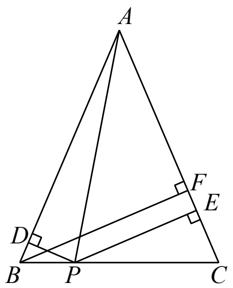

图2

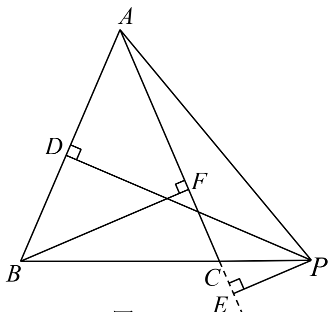

图3

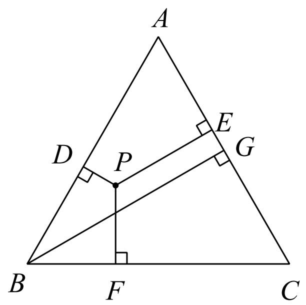

图4

试题解析

【特例探究】(1) 如图1，当P为BC边的中点时，利用面积之间的关系可以发现线段PD，PE，BF之间的数量关系为 __$BF=PD+PE$__.

(1) AP 将三角形分成两块，两个三角形相加的面积等于原三角形的面积，等积法.

由题意得出$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABP}+S_{\Delta ACP}$，则得出$\frac{1}{2}AC\times BF=\frac{1}{2}AB\times PD+\frac{1}{2}AC\times PE$;

解：(1) $\because PD\perp AB$，$PE\perp AC$，$BF\perp AC$，$\therefore S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABP}+S_{\Delta ACP}$，

$\therefore \frac{1}{2}AC\times BF=\frac{1}{2}AB\times PD+\frac{1}{2}AC\times PE$，

$\because AB=AC$，$\therefore BF=PD+PE$.

故答案为：$BF=PD+PE$.

【深入探究】(2) 如图2，当P为BC边上的任意一点时，(1) 中的数量关系是否仍然成立？若成立，请加以证明；若不成立，请写出成立的数量关系，并说明理由.

(2) (1) 中的数量关系仍然成立.

证明：$\because PD\perp AB$，$PE\perp AC$，$BF\perp AC$，$\therefore S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABP}+S_{\Delta ACP}$，

$\therefore \frac{1}{2}AC\times BF=\frac{1}{2}AB\times PD+\frac{1}{2}AC\times PE$，

$\because AB=AC$，$\therefore BF=PD+PE$.

【拓展探究】(3) 如图3，当点P在BC边的延长线上时，

①试猜想线段PD，PE，BF之间的数量关系，并证明你的猜想.

(3) ①既然在延长线上，面积之间的关系应该转化为减法，根据$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABP}-S_{\Delta ACP}$可得出结论；

(3) ① $\because PD\perp AB$，$PE\perp AC$，$BF\perp AC$，$\therefore S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABP}-S_{\Delta ACP}$，

$\therefore \frac{1}{2}AC\times BF=\frac{1}{2}AB\times PD-\frac{1}{2}AC\times PE$，

$\because AB=AC$，$\therefore BF=PD-PE$；

②当$S_{\Delta ABC}=10$，$AB=5$，$PE=2$时，线段PD的长为__6__.

②由三角形面积求出$BF=4$，则可得出答案.

② $\because S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BF=10$，$AB=AC=5$，$\therefore \frac{1}{2}\times 5\times BF=10$，

$\therefore BF=4$，由①可知$PD=BF+PE$，$\therefore PD=4+2=6$，故答案为：6.

【变化一下】(4) 如图2，ΔABC满足$AB=AC=BC$，点P为ΔABC内任意一点，过点P分别作$PD\perp AB$，$PE\perp AC$，$PF\perp BC$，垂足分别为D、E、F，请直接写出PD、PE、PF和BG之间的关系.

(4) 如图2中，结论：$PD+PE+PF=BG$.

理由：连接PA、PB、PC.

$\because S_{\Delta ABC}=S_{\Delta PAB}+S_{\Delta PAC}+S_{\Delta PBC}$

$\therefore \frac{1}{2}\times AC\times BG=\frac{1}{2}\times AB\times PD+\frac{1}{2}\times AC\times PE+\frac{1}{2}\cdot BC\cdot PF$

$\because AB=AC=BC$，

$\therefore BG=PD+PE+PF$.

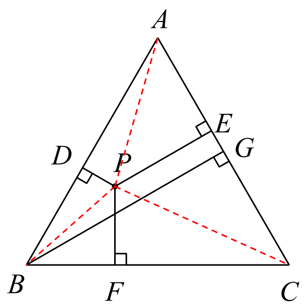

图4

【点评】等积法是此解题的关键，同样等积的思想也是数学学习中的重要思想.在初二上接触勾股定理之前，求解线段长，涉及到高相关线段的等量关系优先考虑等积.