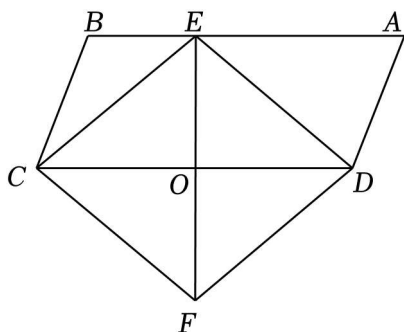


# 初二数学期末复习——中考假期定心卷

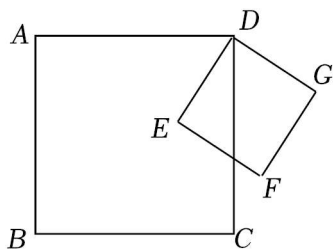
## 参考答案与解析

1. 如图,在平行四边形  $ABCD$  中,点  $E$  在  $AB$  上,连接  $CE$ 、 $DE$ ,以  $CE$ 、 $DE$  为边作菱形  $CEDF$ ,连接  $EF$  交  $CD$  于点  $O$ ,若菱形  $CEDF$  的面积为 12,  $EF=4$ ,  $2\angle BCD + \angle DCF = 180^\circ$ ,则线段  $BE$  的长  $\underline{6 - \sqrt{13}}$ .



【解答】解:设  $\angle DCF = 2x^\circ$ ,  
 $\because 2\angle BCD + \angle DCF = 180^\circ$ ,  
 $\therefore 2\angle BCD + 2x^\circ = 180^\circ$ ,  
 即  $\angle BCD = 90^\circ - x^\circ$ ,  
 $\because$  四边形  $ABCD$  是平行四边形,  
 $\therefore \angle A = \angle BCD = 90^\circ - x^\circ$ ,  $BA \parallel CD$ ,  $BA = CD$ ,  
 $\therefore \angle CDA + \angle A = 180^\circ$ ,  
 即  $\angle CDA = 180^\circ - \angle A = 90^\circ + x^\circ$ ,  
 $\because$  四边形  $CEDF$  是菱形,  
 $\therefore CD \perp EF$ ,  $CO = DO$ ,  $EO = FO = \frac{1}{2}EF = 2$ ,  $CE = ED$ ,  $CF \parallel ED$ ,  
 $\therefore \angle DCF = \angle EDC = 2x^\circ$ ,  $\angle EDA = 90^\circ + x^\circ - 2x^\circ = 90^\circ - x^\circ$ ,  
 $\therefore AE = ED$ ,  $\because$  菱形  $CEDF$  的面积为 12,  
 $\therefore EF \times CD \times \frac{1}{2} = 12$ ,  $4 \times CD \times \frac{1}{2} = 12$ ,  
 $\therefore BA = CD = 6$ ,  $CO = DO = 3$ ,  
 $\because CD \perp EF$ ,  
 $\therefore$  在  $Rt\triangle EOD$ ,  $ED = \sqrt{EO^2 + OD^2} = \sqrt{13}$ ,  
 即  $AE = ED = \sqrt{13}$ ,  
 $\therefore BE = AB - AE = 6 - \sqrt{13}$ ,  
 故答案为:  $6 - \sqrt{13}$ .

2. 如图,正方形  $ABCD$  的边长为 1,  $E$  为与点  $D$  不重合的动点,以  $DE$  一边作正方形  $DEFG$ ,设  $DE = m_1$ ,点  $F$ 、 $G$  与点  $C$  的距离分别为  $m_2$ ,  $m_3$ ,则  $m_1 + m_2 + m_3$  的最小值为  $\underline{\sqrt{2}}$ .

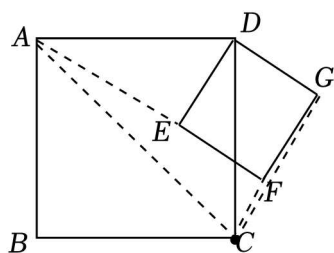


【解答】解:连接  $AE$ ,  $AC$ ,  $CF$ ,  $CG$ ,  
 由正方形  $ABCD$  的边长为 1, 正方形  $DEFG$ ,  
 得  $\triangle AED \cong \triangle CGD(SAS)$ ,  
 得  $m_3 = CG = AE$ ,  $m_1 = DE = EF$ ,

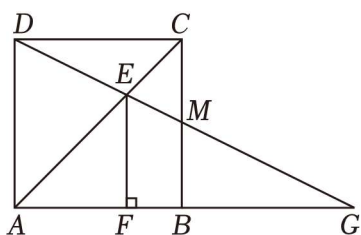
得  $m_1 + m_2 + m_3 = EF + CF + AE$ ,

得当  $A, E, F, C$  在一直线上时,  $m_1 + m_2 + m_3$  最短  $= AC = \sqrt{2}AB = \sqrt{2}$ .

故答案为:  $\sqrt{2}$ .



3. 如图,在边长为2的正方形  $ABCD$  中,点  $M$  为  $BC$  边上一点,连接  $DM$  交  $AC$  于点  $E$ ,过点  $E$  作  $EF \perp AB$  于点  $F$ ,  $AB$ 、 $DM$  的延长线交于点  $G$ ,若  $\frac{BF}{AF} = \frac{1}{2}$ ,则  $MG$  的长为  $\sqrt{5}$ .



【解答】解:由边长为2的正方形  $ABCD$  中,点  $M$  为  $BC$  边上一点,  $EF \perp AB$ ,  $\frac{BF}{AF} = \frac{1}{2}$ ,

得  $EF \parallel CB$ ,

得  $\frac{CE}{AE} = \frac{BF}{AF} = \frac{1}{2}$ ,

由  $DC \parallel AG$ ,

得  $\frac{DC}{AG} = \frac{CE}{AE} = \frac{1}{2}$ ,

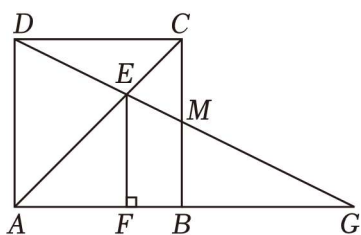
得  $AG = 4$ ,即  $B$  是  $AG$  的中点,

由  $MB \parallel DA$ ,

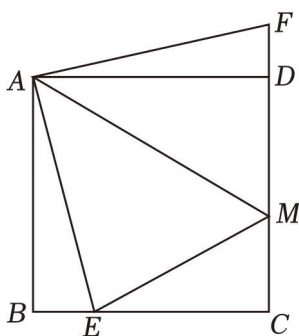
得  $MB = \frac{1}{2}DA = 1$ ,

得  $MG = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ .

故答案为:  $\sqrt{5}$ .



4. 如图,在边长为4的正方形  $ABCD$  中,点  $E$  是  $BC$  上一点,点  $F$  是  $CD$  延长线上一点,连接  $AE, AF$ ,  $AM$  平分  $\angle EAF$  交  $CD$  于点  $M$ . 若  $BE = DF = 1$ ,则  $DM$  的长度为 ( )



A. 2

B.  $\sqrt{5}$ C.  $\sqrt{6}$ D.  $\frac{12}{5}$ 

【解答】解：∵ 四边形  $ABCD$  是正方形，

∴  $AB = AD$ ,  $\angle ABE = \angle ADF = 90^\circ$ ,

∴ 在  $Rt\triangle ABE$  和  $Rt\triangle ADF$  中，

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle ABE = \angle ADF, \\ BE = DF \end{cases}$$

∴  $Rt\triangle ABE \cong Rt\triangle ADF(SAS)$ ,

∴  $AE = AF$ ;

∵  $AM$  平分  $\angle EAF$ ,

∴  $\angle EAM = \angle FAM$ ,

∴ 在  $\triangle AEM$  和  $\triangle AFM$  中，

$$\begin{cases} AE = AF \\ \angle EAM = \angle FAM, \\ AM = AM \end{cases}$$

∴  $\triangle AEM \cong \triangle AFM(SAS)$ ,

∴  $EM = FM$ ;

∵ 四边形  $ABCD$  是正方形，

∴  $BC = CD = 4$ ,  $\angle BCD = 90^\circ$ ,

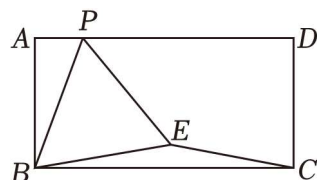
设  $DM = x$ , 则  $MC = CD - DM = 4 - x$ ,  $CE = BC - BE = 4 - 1 = 3$ ,  $EM = FM = FD + DM = 1 + x$ ,

在  $Rt\triangle MCE$  中, 根据勾股定理, 得  $EM^2 = MC^2 + CE^2$ , 即  $(1 + x)^2 = (4 - x)^2 + 3^2$ ,

解得  $x = \frac{12}{5}$ .

故选: D.

5. 如图, 在长方形  $ABCD$  中,  $AB = 1$ ,  $BC = 2$ , 点  $P$  在线段  $AD$  (包括端点) 上运动, 以线段  $BP$  为边, 向右侧作正  $\triangle BPE$ , 连接  $EC$ . 下列结论正确的是 ( )



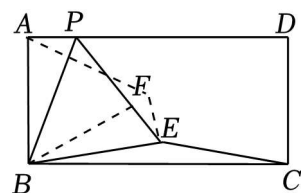
A. 当点  $P$  与点  $A$  重合时,  $CE$  最小

B. 当点  $P$  与点  $D$  重合时,  $CE$  最小

C. 当  $CE$  最小时,  $A$ 、 $E$ 、 $C$  三点共线

D. 当  $CE$  最小时,  $\angle PEC = 75^\circ$

【解答】解: 如图, 以  $AB$  为边向右作等边  $\triangle ABF$ , 连接  $EF$ .



∵  $\triangle BPE$  是等边三角形,

∴  $\angle ABF = \angle PBE = 60^\circ$ ,  $BP = BE$ ,  $BA = BF$ ,

∴  $\angle ABP = \angle FBE$ ,

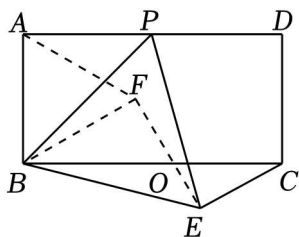
∴  $\triangle ABP \cong \triangle FBE(SAS)$ ,

∴  $\angle BAP = \angle BFE = 90^\circ$ ,  $AP = BF$ ,

∴ 点  $E$  在射线  $FE$  上运动, 且  $FE \perp BF$ , 设  $FE$  交  $BC$  于点  $O$ ,

则  $\angle FBO = 90^\circ - \angle ABF = 30^\circ$ ,

当  $CE \perp FE$  时,  $CE$  的长最小, 此时  $CE \parallel BF$ , 则  $\angle FBO = \angle OCE = 30^\circ$ ,



$$\therefore FO = \frac{1}{2}OB, OE = \frac{1}{2}OC,$$

$$\therefore EF = FO + OE = \frac{1}{2}OB + \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}BC = 1,$$

$$\therefore BF = AB = EF = AP = 1, \text{即: 点 } P \text{ 为 } AD \text{ 中点},$$

$$\therefore \angle FBE = \angle FEB = \angle ABP = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BEC = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle PEC = \angle BEC - \angle BEP = 135^\circ - 60^\circ = 75^\circ.$$

综上, 当点  $P$  为  $AD$  中点时,  $CE$  的长最小, 此时  $\angle PEC = 75^\circ$ .

故选:  $D$ .

## 6. 综合与实践

问题情境:

数学兴趣小组在探究与正方形有关的动点问题时, 如图 2, 在正方形内取一点  $E$ , 使  $\angle CED = 90^\circ$ , 将点  $E$  绕点  $C$  逆时针旋转  $90^\circ$  得到点  $E'$ , 射线  $DE$ ,  $E'B$  交于点  $F$ .

特例研究:

启智小组在探究过程中遵循由特殊到一般的探究规律: 如图 1, 发现点  $E$  在对角线  $AC$  中点  $O$  处时, 点  $F$  与点  $B$  重合, 此时四边形  $EFE'C$  的形状为正方形.

探究发现:

(1) 博学小组发现, 如图 2, 只要  $\angle CED = 90^\circ$ , 四边形  $EFE'C$  的形状都是正方形, 请证明;

(2) 奋发小组受博学小组的启发, 进一步深入探究, 如图 3, 取  $BC$  中点  $G$ , 连接  $E'G$ ,  $FO$ ,  $AF$ , 又发现: 在点  $E$  运动过程中,  $FO$  与  $E'G$  始终保持特定的数量关系, 请写出此数量关系, 并说明理由;

拓展应用:

(3) 在 (2) 的条件下, 已知  $AF = 1$ ,  $BC = 5$ , 直接写出  $BF$  的长度.

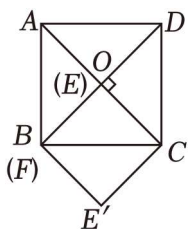


图 1

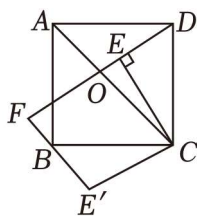


图 2

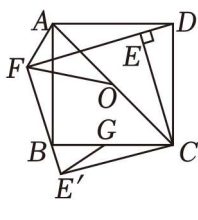
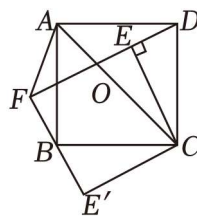


图 3



备用图

【解答】解: (1)  $\because$  四边形  $ABCD$  是正方形,

$$\therefore \angle BCD = 90^\circ, BC = CD,$$

$$\therefore \angle BCE + \angle DCE = 90^\circ,$$

$\because$  点  $E$  绕点  $C$  逆时针旋转  $90^\circ$  得到点  $E'$ ,

$$\therefore CE = CE', \angle ECE' = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCE + \angle DCE = 90^\circ, \angle BCE + \angle BCE' = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DCE = \angle BCE',$$

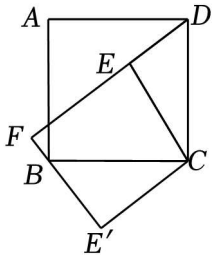
$$\triangle CBE' \cong \triangle CDE (SAS),$$

$$\therefore \angle CED = \angle CE'B = 90^\circ,$$

$\therefore$  四边形  $EFE'C$  的形状都是矩形,

$$\therefore CE = CE',$$

∴ 四边形  $EFE'C$  是正方形.



(2)  $FO = \sqrt{2}E'G$ , 理由如下:

连接  $BD, OG$ ,

∵ 四边形  $ABCD$  是正方形,  $O$  是  $AC$  的中点,

∴  $O$  是  $BD$  的中点,  $AC = BD$ ,  $OC = OB = \frac{1}{2}AC$ ,

∵ 四边形  $EFE'C$  是正方形,

∴  $\angle BFE = 90^\circ$ ,

∴  $FO = OB = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AC = OC$ ,

∵ 四边形  $ABCD$  是正方形,  $O$  是  $AC$  的中点,

∴  $OC = OB$ ,  $\angle BOC = 90^\circ$ ,  $\angle OBC = \angle OCB = 45^\circ$ ,

∵  $G$  是  $BC$  的中点,

∴  $OG = BG = GC$ ,

∴  $OC = \sqrt{OG^2 + GC^2} = \sqrt{2}GC$ ,

∵ 四边形  $EFE'C$  是正方形,

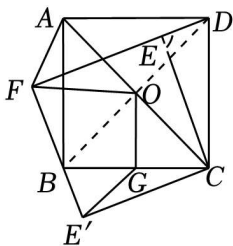
∴  $\angle BE'C = 90^\circ$ ,

∵  $G$  是  $BC$  的中点,

∴  $E'G = \frac{1}{2}BC = GC$ ,

∴  $OC = \sqrt{2}E'G$ ,

∴  $FO = \sqrt{2}E'G$ .



(3) 取  $AF$  的中点  $M$ , 取  $BF$  的中点  $N$ ,

连接  $OM, ON, OB, MN$ ,

∴  $MN \parallel AB$ ,  $MN = \frac{1}{2}AB$ ,

∵  $BC = AB = 5$ ,

∴  $MN = \frac{1}{2}AB = \frac{5}{2}$ ,

根据 (2) 得  $OB = OC = OF = OA$ ,  $AF = 1$ ,

∴  $AM = FM = \frac{1}{2}AF = \frac{1}{2}$ ,  $\angle OMF = 90^\circ$ ,  $\angle AOM = \angle FOM = \frac{1}{2}\angle AOF$ ,

∴  $FN = BN = \frac{1}{2}BF$ ,  $\angle ONF = 90^\circ$ ,  $\angle BON = \angle FON = \frac{1}{2}\angle BOF$ ,

∵ 四边形  $ABCD$  是正方形,  $O$  是  $AC$  的中点,  $BC = AB = 5$ ,

∴  $\angle AOB = 90^\circ$ ,  $AC = BD = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5\sqrt{2}$ ,  $OA = OB = OF = \frac{1}{2}AC = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ ,

$$\therefore \angle FOM + \angle FON = \frac{1}{2} \angle AOF + \frac{1}{2} \angle BOF = \frac{1}{2} (\angle AOF + \angle BOF) = \frac{1}{2} \angle AOB = 45^\circ,$$

$$\therefore OM = \sqrt{OF^2 - MF^2} = \frac{7}{2},$$

过点  $M$  作  $MQ \perp ON$  于点  $Q$ ,

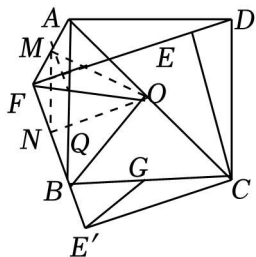
$$\therefore MQ = OQ = OM \sin 45^\circ = \frac{7\sqrt{2}}{4},$$

$$\therefore NQ = \sqrt{MN^2 - MQ^2} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

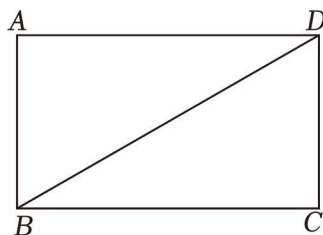
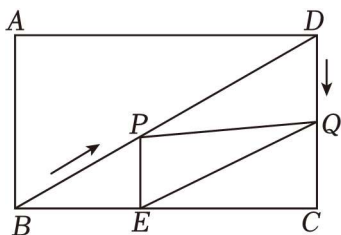
$$\therefore ON = OQ + NQ = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore FN = \sqrt{OF^2 - ON^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore BF = 2FN = 3\sqrt{2}.$$



7. 如图, 矩形  $ABCD$  中,  $CD = 4$ ,  $\angle CBD = 30^\circ$ . 一动点  $P$  从  $B$  点出发沿对角线  $BD$  方向以每秒 2 个单位长度的速度向点  $D$  匀速运动, 同时另一动点  $Q$  从  $D$  点出发沿  $DC$  方向以每秒 1 个单位长度的速度向点  $C$  匀速运动, 当其中一个点到达终点时, 另一个点也随之停止运动. 设点  $P$ 、 $Q$  运动的时间为  $t$  秒 ( $t > 0$ ). 过点  $P$  作  $PE \perp BC$  于点  $E$ , 连接  $EQ$ ,  $PQ$ .



(1) 求证:  $PE = DQ$ ;

(2) 当  $t$  为何值时,  $\triangle PQE$  为直角三角形? 请说明理由.

**【解答】**(1) 证明:  $\because PE \perp BC$ ,

$$\therefore \angle BEP = 90^\circ,$$

在  $Rt\triangle BEP$  中,  $BP = 2t$ ,

$$\because \angle CBD = 30^\circ,$$

$$\therefore PE = t,$$

$$\text{又} \because DQ = t,$$

$$\therefore PE = DQ;$$

(2) 解: ① 当  $\angle EPQ = 90^\circ$  时, 四边形  $EPQC$  为矩形,

$$\therefore PE = QC,$$

$$\because PE = t, QC = 4 - t,$$

$$\therefore t = 4 - t, \text{ 即 } t = 2;$$

② 当  $\angle PQE = 90^\circ$  时,  $\angle DPQ = \angle PQE = 90^\circ$ ,

在  $Rt\triangle DPQ$  中,  $\angle PQD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ,

$$\therefore DQ = 2DP,$$

$$\because DQ = t, DP = 8 - 2t$$

$$\therefore t = 2(8 - 2t),$$

$$\therefore t = \frac{16}{5},$$

③当 $\angle PEQ = 90^\circ$ 时,此种情况不存在,

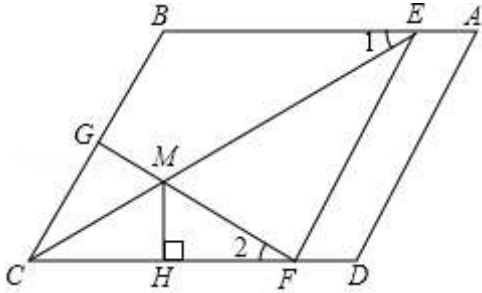
综上所述,当 $t = 2$ 或 $\frac{16}{5}$ 时, $\triangle PQE$ 为直角三角形.

8. 如图,在平行四边形 $ABCD$ 中, $CE$ 平分 $\angle BCD$ ,交 $AB$ 边于点 $E$ , $EF \parallel BC$ ,交 $CD$ 于点 $F$ ,点 $G$ 是 $BC$ 边的中点,连接 $GF$ ,且 $\angle 1 = \angle 2$ , $CE$ 与 $GF$ 交于点 $M$ ,过点 $M$ 作 $MH \perp CD$ 于点 $H$ .

(1) 求证:四边形 $BCFE$ 是菱形;

(2) 若 $CH = 1$ ,求 $BC$ 的长;

(3) 求证: $EM = FG + MH$ .



【解答】(1) 证明: $\because$  四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AB \parallel CD$ ,

$\therefore \angle 1 = \angle ECF$ ,

$\because EF \parallel BC$ ,

$\therefore$  四边形 $BCFE$ 是平行四边形,

$\because CE$ 平分 $\angle BCD$ ,

$\therefore \angle BCE = \angle ECF$ ,

$\therefore \angle BCE = \angle 1$ ,

$\therefore BC = BE$ ,

$\therefore$  四边形 $BCFE$ 是菱形;

(2)  $\because \angle 1 = \angle ECF$ ,  $\angle 1 = \angle 2$ ,

$\therefore \angle ECF = \angle 2$ ,

$\therefore CM = FM$ ,

$\because MH \perp CD$ ,

$\therefore CF = 2CH = 2 \times 1 = 2$ ,

$\because$  四边形 $BCFE$ 是菱形;

$\therefore BC = CF = 2$ ;

(3) 连接 $BF$ 交 $CE$ 于点 $O$ ,

$\because G$ 是 $BC$ 中点,

$\therefore CG = \frac{1}{2}CB$ ,

$\because CH = \frac{1}{2}CF$ ,

$\therefore CG = CH$ ,

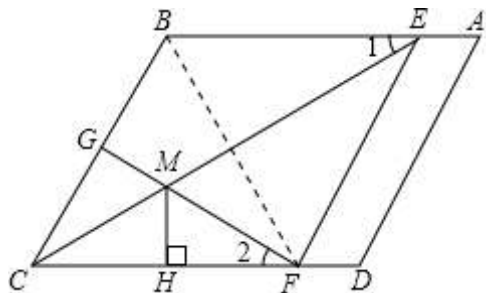
在 $\triangle CGM$ 和 $\triangle CHM$ 中,

$$\begin{cases} CM = CM \\ \angle GCM = \angle HCM, \\ CG = CH \end{cases}$$

$\therefore \triangle CGM \cong \triangle CHM (SAS)$ ,

$\therefore \angle CGM = \angle CHM = 90^\circ$ ,

即  $FG \perp BC$ ,  
 $\therefore CF = BF$ ,  
 $\because BC = CF$ ,  
 $\therefore BC = CF = BF$ ,  
 $\therefore \triangle BCF$  是等边三角形,  
 $\therefore \angle BFC = 60^\circ$ ,  
 $\therefore \angle 2 = \angle BFG = 30^\circ$ ,  
 $\because BF \perp CE$ ,  
 $\therefore OM = MH$ ,  
 $\because OE = OC = FG$ ,  
 $\therefore EM = FG + MH$ .



9. 如图, 平行四边形  $ABCD$  中,  $BC = BD$ . 点  $F$  是线段  $AB$  的中点. 过点  $C$  作  $CG \perp DB$  交  $BD$  于点  $G$ ,  $CG$  延长线交  $DF$  于点  $H$ . 且  $CH = DB$ .

(1) 如图 1, 若  $DH = 1$ . 求  $FH$  的值;

(2) 如图 2, 连接  $FG$ . 求证:  $DB = \sqrt{2}FG + HG$ .

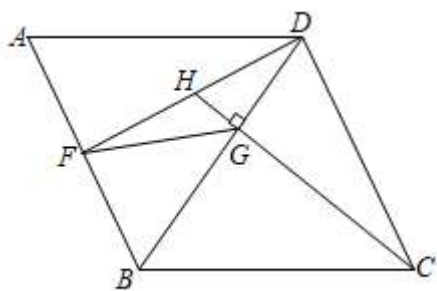


图 1

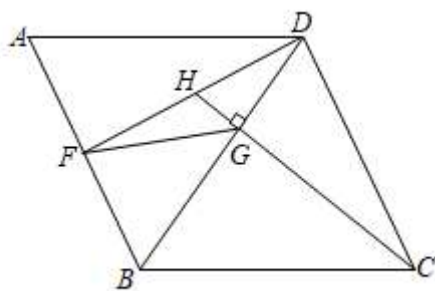


图 2

【解答】(1) 证明: 如图 1 中,

$\because$  四边形  $ABCD$  是平行四边形,  
 $\therefore AD = BC, AB = CD, AB \parallel CD$ ,  
 $\because BD = BC$ ,  
 $\therefore AD = BD$ ,  
 $\because AF = FB$ ,  
 $\therefore DF \perp AB$ ,  
 $\therefore DF \perp DC$ ,  
 $\because CG \perp BD$ ,  
 $\therefore \angle CDH = \angle CGD = \angle DFB = 90^\circ$ ,  
 $\therefore \angle BDF + \angle CDG = 90^\circ, \angle CDG + \angle DCH = 90^\circ$ ,  
 $\therefore \angle BDF = \angle DCH$ ,  
 $\because CH = DB$ ,  
 $\therefore \triangle DFB \cong \triangle CDH (AAS)$ ,  
 $\therefore DH = BF, CD = DF$ ,





$$\text{而 } \frac{a^4 - ma^2 + 1}{2a^3 + ma^2 + 2a} = \frac{a^2 - m + \frac{1}{a^2}}{2a + m + \frac{2}{a}} = \frac{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 - m}{2\left(a + \frac{1}{a}\right) + m},$$

$$\therefore \frac{a^4 - ma^2 + 1}{2a^3 + ma^2 + 2a} = 2,$$

$$\therefore \frac{6^2 - 2 - m}{2 \times 6 + m} = 2, \text{ 即 } \frac{-m + 34}{m + 12} = 2,$$

$$\text{解得 } m = \frac{10}{3},$$

经检验  $m = \frac{10}{3}$  是原方程的解,

故答案为:  $\frac{10}{3}$ .

11. 若关于  $x$  的不等式组  $\begin{cases} 2x - 1 \geq 3x - 5 \\ -3x + a < 2 \end{cases}$  有且只有 3 个偶数解, 且关于  $y$  的分式方程  $\frac{y+a}{y-2} - \frac{a}{y+2} = 1$  的解为正数, 则符合条件的所有整数  $a$  的和为  $\underline{\hspace{2cm}} - 7 \underline{\hspace{2cm}}$ .

【解答】解: 解关于  $x$  的不等式组, 得  $\frac{a-2}{3} < x \leq 4$ ,

$\therefore$  不等式组有且只有 3 个偶数解,

$$\therefore -2 \leq \frac{a-2}{3} < 0,$$

$$\therefore -4 \leq a < 2;$$

解关于  $y$  的分式方程, 得  $y = -2(a+1)$ ,

$\therefore$  分式方程的解为正数,

$$\therefore -2(a+1) > 0,$$

$$\therefore a < -1,$$

$\therefore y = 2$  或  $-2$  是分式方程的增根,

$$\therefore a \neq 0 \text{ 或 } a \neq -2,$$

$$\therefore -4 \leq a < -1 \text{ 且 } a \neq 0 \text{ 且 } a \neq -2,$$

$\therefore a$  为整数,

$$\therefore a \text{ 可以是 } -4, -3,$$

$$-4 - 3 = -7,$$

$\therefore$  符合条件的所有整数  $a$  的和为  $-7$ .

故答案为:  $-7$ .

12. 若关于  $x$  的一元一次不等式组  $\begin{cases} 3(x-2) - 2 \leq x \\ 7x - a > 3 \end{cases}$  有且仅有 4 个整数解, 关于  $y$  的分式方程  $\frac{y-a}{y-2} - \frac{1-2y}{2-y} = 1$  的

解是正整数, 则所有满足条件的整数  $a$  的值之积是  $\underline{\hspace{2cm}} - 3 \underline{\hspace{2cm}}$ .

【解答】解:  $\begin{cases} 3(x-2) - 2 \leq x \text{ ①} \\ 7x - a > 3 \text{ ②} \end{cases}$ ,

解不等式①得:  $x \leq 4$ ,

$$\text{解不等式②得: } x > \frac{a+3}{7},$$

根据题意可知不等式组的解集为  $\frac{a+3}{7} < x \leq 4$ ,

$\therefore$  关于  $x$  的一元一次不等式组有且只有 4 个整数解,

$$\therefore 0 \leq \frac{a+3}{7} < 1,$$

$$\text{解得 } -3 \leq a < 4,$$

关于  $y$  的分式方程的两边都乘以  $y-2$  得,

$$y - a + 1 - 2y = y - 2,$$

解得  $y = \frac{3-a}{2}$ ,

由于分式方程有增根  $y = 2$ ,

当  $y = 2$  时, 即  $3 - a = 4$ ,

解得  $a = -1$ ,

因此  $a \neq -1$ ,

又  $\because$  分式方程的解是正整数,

$$\therefore 3 - a > 0,$$

$$\therefore a < 3,$$

综上所述  $-3 \leq a < 3$  且  $a \neq -1$ ,

因此整数  $a$  的值为  $-3, -2, 0, 1, 2$ ,

由于  $y = \frac{3-a}{2}$  是正整数,

$$\therefore a = -3 \text{ 或 } a = 1,$$

$\therefore$  所有满足条件的整数  $a$  的值之积是  $-3 \times 1 = -3$ .

故答案为:  $-3$ .

13. 先化简, 再求值:  $\left(\frac{3}{a+1} - a + 1\right) \div \frac{a^2 - 4a + 4}{a+1} + \frac{4}{a-2} - a$ , 并从  $-1, 0, 2$  中选一个合适的数作为  $a$  的值代入求值.

【解答】解: 原式  $= \left(\frac{3}{a+1} - \frac{a^2-1}{a+1}\right) \times \frac{a+1}{(a-2)^2} + \frac{4}{a-2} - a$

$$= \frac{4-a^2}{a+1} \times \frac{a+1}{(a-2)^2} + \frac{4}{a-2} - a$$
$$= \frac{-2-a}{a-2} + \frac{4}{a-2} - a$$
$$= \frac{2-a}{a-2} - a$$
$$= -1 - a,$$

当  $a = -1$  或  $2$  时, 原式分母为  $0$ , 无意义,

$\therefore$  当  $a = 0$  时, 原式  $= -1$ .

14. 2020 年 2 月, 因新冠肺炎确诊病例不断增加, 湖北某医疗救治中心计划购买一批无创呼吸机和双向呼吸机, 两款共 200 台, 预算分别为 56 万元和 156 万元. 已知每台双向呼吸机的售价是每台无创呼吸机售价的 2 倍少 1000 元.

(1) 求该救治中心计划分别购进无创呼吸机和双向呼吸机各多少台?

(2) 为了表达对湖北疫区人民支持, 呼吸机生产厂家立即对两款呼吸机均进行打折零利润销售, 实际售价均在原售价的基础上下降了  $a\%$ , 根据救治中心一线医护人员的实际需求, 双向呼吸机的实际购买量比原计划增加了  $\frac{5}{12}a\%$ , 结果购买双向呼吸机比购买无创呼吸机多花费了 90.4 万元, 求  $a$  的值.

【解答】解: (1) 设无创呼吸机售价  $x$  元, 则双向呼吸机售价  $(2x - 1000)$  元,

依题意得:  $\frac{560000}{x} + \frac{1560000}{2x-1000} = 200$ ,

整理得:  $x^2 - 7200x + 1400000 = 0$ ,

解得:  $x_1 = 200, x_2 = 7000$ .

经检验,  $x_1 = 200, x_2 = 7000$  都是原方程的解.

$$\because x \text{ 元}, 2x - 1000 > 0,$$

$$\therefore x = 7000,$$

$$560000 \div 7000 = 80(\text{台}), 1560000 \div (2 \times 7000 - 1000) = 120(\text{台}),$$

答: 该救治中心计划分别购进无创呼吸机 80 台, 购进双向呼吸机 120 台;

(2) 依题意得: 无创呼吸机实际售价  $7000(1 - a\%)$  元, 双向呼吸机实际售价  $(2 \times 7000 - 1000)(1 - a\%) = 1300(1 -$

$a\%$ 元,

$$120\left(1 + \frac{5}{12}a\%\right) \times 13000(1 - a\%) = 80 \times 7000(1 - a\%) + 904000,$$

整理得:  $13a^2 + 700a - 19200 = 0$ ,

解得:  $a = 20$ (负值舍去).

答:  $a$  的值为 20

15. 某商场用 24000 元购入一批空调, 然后以每台 3000 元的价格销售, 因天气炎热, 空调很快售完, 商场又以 52000 元的价格再次购入该种型号的空调, 数量是第一次购入的 2 倍, 但购入的单价上调了 200 元, 每台的售价也上调了 200 元.

(1) 商场第一次购入的空调每台进价是多少元?

(2) 商场既要尽快售完第二次购入的空调, 又要在这两次空调销售中获得的利润率不低于 22%, 打算将第二次购入的部分空调按每台九五折出售, 最多可将多少台空调打折出售?

【解答】解:

(1) 设商场第一次购入的空调每台进价是  $x$  元, 由题意列方程得:

$$\frac{24000}{x} \times 2 = \frac{52000}{x + 200},$$

解得:  $x = 2400$ ,

经检验  $x = 2400$  是原方程的根,

答: 商场第一次购入的空调每台进价是 2400 元;

(2) 设将  $y$  台空调打折出售, 根据题意, 得:

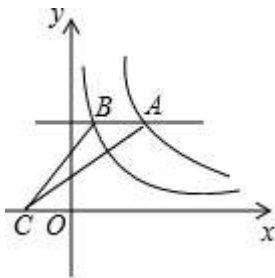
$$3000 \times \frac{24000}{2400} + (3000 + 200) \times 0.95y + (3000 + 200) \times \left(\frac{52000}{2400 + 200} - y\right) \geq (24000 + 52000) \times (1 + 22\%),$$

解得:  $y \leq 8$ ,

答: 最多将 8 台空调打折出售.

16. 如图, 平行于  $x$  轴的直线与函数  $y = \frac{k_1}{x} (k_1 > 0, x > 0)$  和  $y = \frac{k_2}{x} (k_2 > 0, x > 0)$  的图象分别相交于  $A, B$  两点.

点  $A$  在点  $B$  的右侧,  $C$  为  $x$  轴上的一个动点, 若  $\triangle ABC$  的面积为 4, 则  $k_1 - k_2$  的值为 8.



【解答】解:

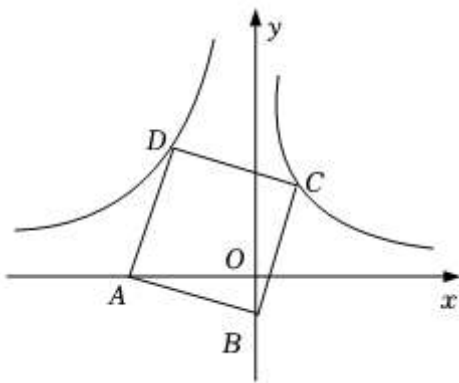
设:  $A, B$  点的坐标分别是  $A\left(\frac{k_1}{m}, m\right), B\left(\frac{k_2}{m}, m\right)$ ,

$$\text{则: } \triangle ABC \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot y_A = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k_1}{m} - \frac{k_2}{m}\right) \cdot m = 4,$$

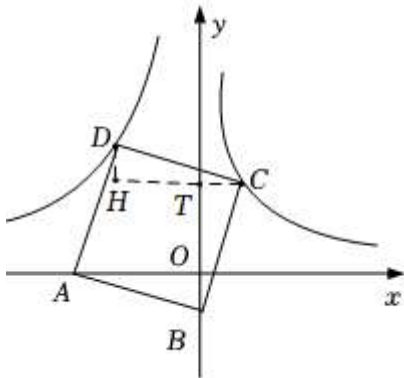
则  $k_1 - k_2 = 8$ .

故答案为 8.

17. 如图, 已知在平面直角坐标系  $xOy$  中, 点  $A$  在  $x$  轴的负半轴上, 点  $B$  在  $y$  轴的负半轴上,  $\tan \angle ABO = 3$ , 以  $AB$  为边向上作正方形  $ABCD$ . 若图象经过点  $C$  的反比例函数的解析式是  $y = \frac{1}{x}$ , 则图象经过点  $D$  的反比例函数的解析式是  $y = -\frac{3}{x}$ .



【解答】解：如图，过点  $C$  作  $CT \perp y$  轴于点  $T$ ，过点  $D$  作  $DH \perp CT$  交  $CT$  的延长线于点  $H$ 。



$$\because \tan \angle ABO = \frac{AO}{OB} = 3,$$

$\therefore$  可以假设  $OB = a$ ,  $OA = 3a$ ,

$\because$  四边形  $ABCD$  是正方形,

$$\therefore AB = BC, \angle ABC = \angle AOB = \angle BTC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABO + \angle CBT = 90^\circ, \angle CBT + \angle BCT = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABO = \angle BCT,$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle BTC (\text{AAS}),$$

$$\therefore BT = OA = 3a, OB = TC = a,$$

$$\therefore OT = BT - OB = 2a,$$

$$\therefore C(a, 2a),$$

$\because$  点  $C$  在  $y = \frac{1}{x}$  的图象上,

$$\therefore 2a^2 = 1,$$

同法可证  $\triangle CHD \cong \triangle BTC$ ,

$$\therefore DH = CT = a, CH = BT = 3a,$$

$$\therefore D(-2a, 3a),$$

设经过点  $D$  的反比例函数的解析式为  $y = \frac{k}{x}$ , 则有  $-2a \times 3a = k$ ,

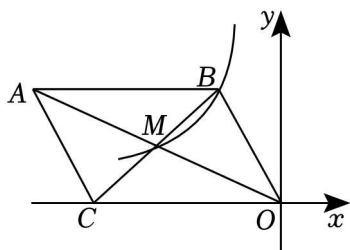
$$\therefore k = -6a^2 = -3,$$

$\therefore$  经过点  $D$  的反比例函数的解析式是  $y = -\frac{3}{x}$ .

故答案为:  $y = -\frac{3}{x}$ .

18. 如图，在平面直角坐标系中， $O$  为坐标原点， $\square ABOC$  的对角线相交于点  $M$ ，双曲线  $y = \frac{k}{x} (x < 0)$  经过点  $B$ ，

$M$ 。若  $\square ABOC$  的面积为 24。则  $k = \underline{\hspace{2cm}} - 8 \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【解答】解：设  $M$  的坐标是  $(m, n)$ ，则  $mn = k$ ，

$\because$  平行四边形  $ABOC$  中  $M$  是  $OA$  的中点，

$\therefore A$  的坐标是： $(2m, 2n)$ ， $B$  的纵坐标是  $2n$ ，

把  $y = 2n$  代入  $y = \frac{k}{x}$  得： $x = \frac{k}{2n}$ ，即  $B$  的横坐标是： $\frac{k}{2n}$ 。

$\therefore AB = OC = \frac{k}{2n} - 2m$ ， $OC$  边上的高是  $2n$ ，

$\therefore \left(\frac{k}{2n} - 2m\right) \cdot 2n = 24$ ，

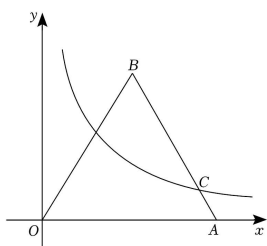
即  $k - 4mn = 24$ ，

$\therefore k - 4k = 24$ ，

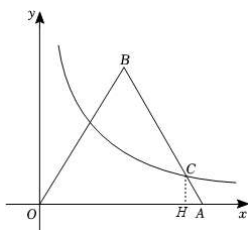
解得： $k = -8$ 。

故答案为：-8。

19. 如图，在平面直角坐标系  $xOy$  中等边  $\triangle OAB$  的顶点  $A$  在  $x$  轴正半轴上，点  $B$  在第一象限。反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ ) 的图象交  $AB$  边于点  $C$ 。若  $OB^2 - BC^2 = 12$ ，则  $k$  的值为  $3\sqrt{3}$ 。



【解答】解：设等边三角形的边长为  $x$ ， $AC$  长为  $2a$ ，作  $CH \perp OA$  于  $H$ ，



$\therefore AH = AC \cdot \cos 60^\circ = 2a \times \frac{1}{2} = a$ ， $CH = AC \cdot \sin 60^\circ = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}a$ ，

$\therefore C(x - a, \sqrt{3}a)$ ，

$\because OB^2 - BC^2 = 12$ ，

$\therefore (OB - BC)(OB + BC) = 12$ ，

即  $2a(x + x - 2a) = 12$ ，

$\therefore a(x - a) = 3$ ，

$\because C$  点在反比例函数上，

$\therefore (x - a) \times \sqrt{3}a = k$ ，

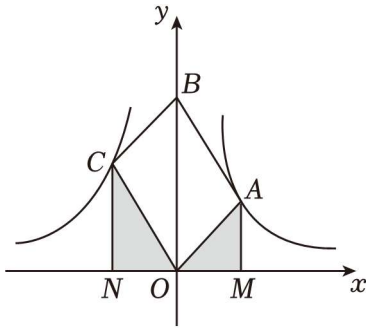
$\therefore k = 3\sqrt{3}$ ，

故答案为： $3\sqrt{3}$ 。

20. 如图,  $OABC$  是平行四边形, 对角线  $OB$  在  $y$  轴正半轴上, 位于第一象限的点  $A$  和第二象限的点  $C$  分别在双曲线  $y = \frac{k_1}{x}$  和  $y = \frac{k_2}{x}$  的一个分支上, 分别过点  $A$ 、 $C$  作  $x$  轴的垂线段, 垂足分别为点  $M$  和点  $N$ , 先给出如下四个结论:

- ①  $\frac{AM}{CN} = \left| \frac{k_1}{k_2} \right|$ ;  
 ② 阴影部分的面积是  $\frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ ;  
 ③ 当  $\angle AOC = 90^\circ$  时,  $|k_1| = |k_2|$ ;  
 ④ 若  $OABC$  是菱形, 则  $k_1 + k_2 = 0$ ,  
 以上结论正确的是

( )



- A. ①③                      B. ①②③                      C. ②③④                      D. ①④

【解答】解: 作  $AE \perp y$  轴于  $E$ ,  $CF \perp y$  轴于  $F$ , 如图

$\because$  四边形  $OABC$  是平行四边形,

$$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COB},$$

$$\therefore AE = CF,$$

$$\therefore OM = ON,$$

$$\therefore S_{\triangle AOM} = \frac{1}{2}|k_1| = \frac{1}{2}OM \cdot AM, S_{\triangle CON} = \frac{1}{2}|k_2| = \frac{1}{2}ON \cdot CN,$$

$$\therefore \frac{AM}{CN} = \left| \frac{k_1}{k_2} \right|, \text{故①正确;}$$

$$\therefore S_{\triangle AOM} = \frac{1}{2}|k_1|, S_{\triangle CON} = \frac{1}{2}|k_2|,$$

$$\therefore S_{\text{阴影部分}} = S_{\triangle AOM} + S_{\triangle CON} = \frac{1}{2}(|k_1| + |k_2|),$$

而  $k_1 > 0, k_2 < 0$ ,

$$\therefore S_{\text{阴影部分}} = \frac{1}{2}(k_1 - k_2), \text{故②错误;}$$

当  $\angle AOC = 90^\circ$ ,

$\therefore$  四边形  $OABC$  是矩形,

$\therefore$  不能确定  $OA$  与  $OC$  相等,

而  $OM = ON$ ,

$\therefore$  不能判断  $\triangle AOM \cong \triangle CNO$ ,

$\therefore$  不能判断  $AM = CN$ ,

$\therefore$  不能确定  $|k_1| = |k_2|$ , 故③错误;

若四边形  $OABC$  是菱形, 则  $OA = OC$ ,

而  $OM = ON$ ,

$$\therefore Rt\triangle AOM \cong Rt\triangle CNO(HL),$$

$$\therefore AM = CN,$$

$$\therefore |k_1| = |k_2|,$$

$$\therefore k_1 = -k_2,$$

$$\therefore k_1 + k_2 = 0, \text{故④正确.}$$



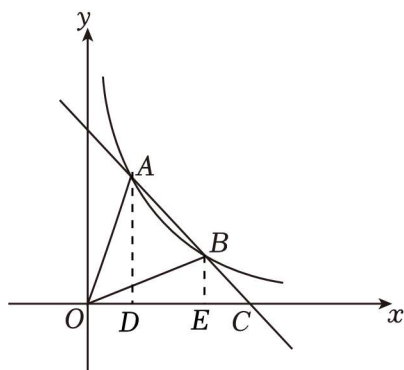


A. 2

B.  $\frac{8}{3}$ C.  $\frac{16}{3}$ 

D. 4

【解答】解：过点  $A, B$  分别作  $AD \perp x$  轴于  $D, BE \perp x$  轴于  $E$ , 如图所示：



$$\therefore AD \parallel BE,$$

$$\therefore AB = BC,$$

$\therefore BE$  是  $\triangle ADC$  的中位线,

$$\therefore AD = 2BE,$$

设  $BE = t$ , 则  $AD = 2t$ ,

对于  $y = ax + b$ , 当  $y = t$  时,  $x = \frac{t-b}{a}$ , 当  $y = 2t$  时,  $x = \frac{2t-b}{a}$ ,

$$\therefore \text{点 } A\left(\frac{2t-b}{a}, 2t\right), \text{点 } B\left(\frac{t-b}{a}, t\right),$$

$\therefore$  点  $A, B$  在反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  的图象上,

$$\therefore k = 2t \cdot \frac{2t-b}{a} = t \cdot \frac{t-b}{a},$$

$$\therefore b = 3t,$$

对于  $y = ax + b$ , 当  $y = 0$  时,  $x = -\frac{b}{a}$ ,

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标为 } \left(-\frac{b}{a}, 0\right),$$

$$\therefore OC = -\frac{b}{a},$$

$\therefore \triangle OAC$  的面积为 8,

$$\therefore \frac{1}{2} OC \cdot AD = 8,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times \left(-\frac{b}{a}\right) \times 2t = 8,$$

$$\therefore bt = -8a,$$

$$\therefore b = 3t,$$

$$\therefore t^2 = -\frac{8a}{3},$$

$$\therefore k = t \cdot \frac{t-b}{a} = \frac{t^2 - bt}{a} = \frac{-\frac{8a}{3} + 8a}{a} = \frac{16}{3}.$$

故选：C.

### 23. 阅读与思考

下面是小明同学的一篇数学日记, 请仔细阅读并完成相应的任务. 今天是 2024 年 3 月 28 日 (星期四), 在下午数学活动课上, 我们数学兴趣小组的同学参加了一次“探索压力一定时, 压强  $p$  与受力面积  $S$  函数关系的数学活动”.

第一步, 如图, 将一长方体  $A$  放置于一水平玻璃桌面上, 按不同的方式摆放, 相应的记录桌面所受压强  $p(\text{Pa})$  与受力面积  $S(\text{m}^2)$ .

第二步, 数据整理, 收集记录的数据如下:

	第一组	第二组	第三组	第四组	第五组	第六组
--	-----	-----	-----	-----	-----	-----

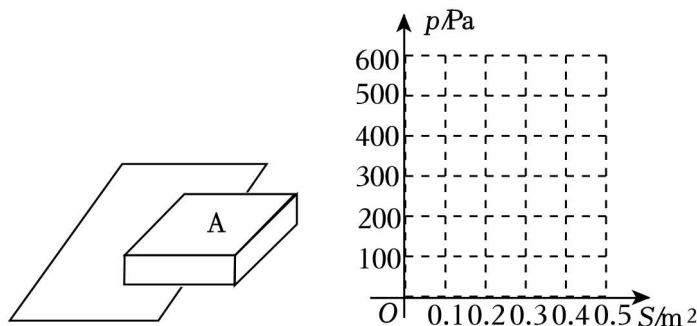
受力面积 $S/m^2$	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.4
桌面所受的压强 $p/Pa$	600	400	300	25	20	150

第三步,数据分析,以  $S$  的数值为横坐标,  $p$  的数值为纵坐标建立平面直角坐标系,在该坐标系中描出以表中数对为坐标的各点,并用光滑的曲线顺次连接这些点.

数据分析中,我发现一组数据可能有明显错误,重新实验,证明了我的猜想正确,并对数据进行了修改,实验结束后,大家有很多收获,每人都撰写了数学日记.

任务:

- (1) 你认为表中哪组数据是明显错误的;并直接写出  $p$  关于  $S$  的函数表达式.
- (2) 在平面直角坐标系中,画出此函数的图象.
- (3) 结合图象,如果要求压强不超过  $100Pa$ ,那么长方体  $A$  的受力面积至少为 0.6  $m^2$ .

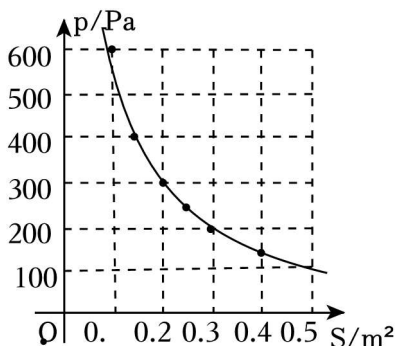


【解答】解: (1) 通过数据发现:  $S$  与  $p$  的积都是定值 60, 第四组的压强 250 错了,

设  $P = \frac{F}{S}$ , 把  $(0.1, 600)$  代入得,  $F = 60$ ,

$\therefore p$  关于  $S$  的函数表达式为  $p = \frac{60}{S} (S > 0)$ ;

(2) 画出函数图象如图所示:



(3) 令  $P = 100$ , 代入关系式得:  $S = 0.6$ .

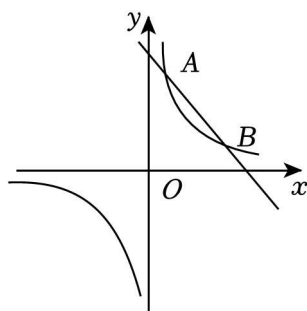
$\therefore$  长方体  $A$  的受力面积至少  $0.6m^2$ ,

故答案为: 0.6.

24. 如图, 一次函数  $y_1 = -x + 7$  与反比例函数  $y_2 = \frac{k}{x}$  图象相交于两点  $A(1, m)$  和  $B$ . (点  $A$  在左边)

(1) 求  $m$  和  $k$  的值;

(2) 点  $C$  在  $y$  轴上, 当  $\triangle ABC$  的面积为 5 时, 求点  $C$  的坐标.



【解答】解：(1)  $\because$  点  $A(1, m)$  在一次函数  $y_1 = -x + 7$  图象上，

$$\therefore m = -1 + 7 = 6,$$

$$\therefore A(1, 6),$$

$$\text{把 } A(1, 6) \text{ 代入 } y_2 = \frac{k}{x} \text{ 得, } 6 = \frac{k}{1},$$

$$\therefore k = 6;$$

$$(2) \text{ 由 } \begin{cases} y = -x + 7 \\ y = \frac{6}{x} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases},$$

$$\therefore B(6, 1),$$

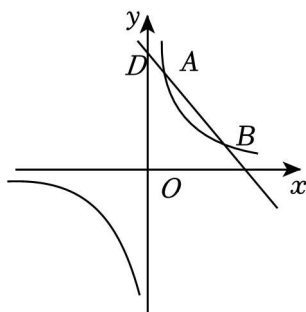
设一次函数图象与  $y$  轴的交点为  $D$ , 则  $D(0, 7)$ ,

$\therefore \triangle ABC$  的面积为 5,

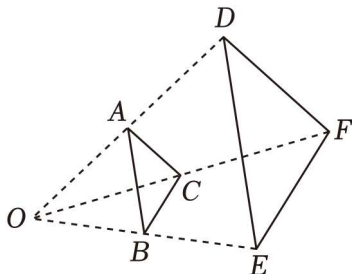
$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BCD} - S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} CD \cdot (6 - 1) = 5,$$

$$\therefore CD = 2,$$

$$\therefore C(0, 5) \text{ 或 } (0, 9).$$



25. 如图,  $\triangle ABC$  与  $\triangle DEF$  是位似图形, 且位于点  $O$  同侧, 点  $O$  是位似中心,  $OB = BE$ , 若  $S_{\triangle ABC} = 2$ , 则  $S_{\triangle DEF} =$  8.



【解答】解： $\because OB:BE = 1$ ,

$$\therefore OB:OE = 1:2,$$

$\because \triangle ABC$  与  $\triangle DEF$  是位似图形,

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF, BC \parallel EF,$$

$$\therefore \triangle BOC \sim \triangle EOF,$$

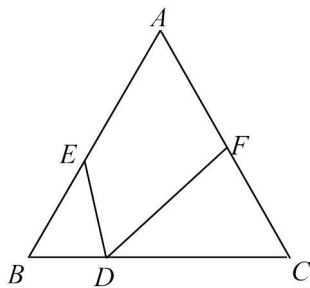
$$\therefore \frac{BC}{EF} = \frac{OB}{OE} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEF}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2, \text{ 即 } \frac{2}{S_{\triangle DEF}} = \frac{1}{4},$$

解得： $S_{\triangle DEF} = 8$ ,

故答案为：8.

26. 如图, 在边长为 6 的等边  $\triangle ABC$  中,  $D$  是  $BC$  边上动点,  $\angle EDF = 60^\circ$ ,  $E$ 、 $F$  分别在  $AB$ 、 $AC$  边上. 若  $BD = 2$ ,  $FC = 3$ , 则  $BE =$   $\frac{8}{3}$ .



【解答】解：∵  $\triangle ABC$  是等边三角形， $BC = 6$ ， $BD = 2$ ，

$$\therefore \angle B = \angle C = 60^\circ, CD = 4,$$

$$\therefore \angle BED + \angle BDE = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle EDF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CDF + \angle BDE = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle BED = \angle CDF,$$

$$\therefore \triangle BED \sim \triangle CDF,$$

$$\therefore \frac{BE}{CD} = \frac{BD}{CF},$$

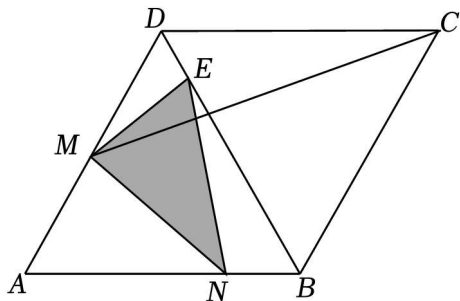
$$\therefore \frac{BE}{4} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore BE = \frac{8}{3},$$

故答案为： $\frac{8}{3}$ 。

27. 如图，在菱形  $ABCD$  中， $\angle A = 60^\circ$ ，点  $M, N$  是边  $AD, AB$  上任意两点，将菱形  $ABCD$  沿  $MN$  翻折，点  $A$  恰巧落在对角线  $BD$  上的点  $E$  处，下列结论：

①  $\triangle MED \sim \triangle ENB$ ；② 若  $\angle DME = 15^\circ$ ，则  $\angle ENB = 105^\circ$ ；③ 若菱形边长为 4， $M$  是  $AD$  的中点，连接  $MC$ ，则  $MC = 2\sqrt{3}$ ；④ 若  $DE:BE = 2:5$ ，则  $AM:AN = 3:4$ ，其中正确结论是 ①②④。



【解答】解：∵ 四边形  $ABCD$  是菱形，

$$\therefore AB = AD,$$

$$\therefore \angle A = 60^\circ$$

$$\therefore \triangle ABD \text{ 是等边三角形},$$

$$\therefore \angle ADB = \angle ABD = 60^\circ,$$

由折叠性质可知， $\angle A = \angle MEN = 60^\circ$ ，

$$\therefore \angle MED + \angle BEN = 120^\circ$$

$$\therefore \angle MED + \angle DME = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle DME = \angle BEN,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle ABD,$$

$$\therefore \triangle MED \sim \triangle ENB,$$

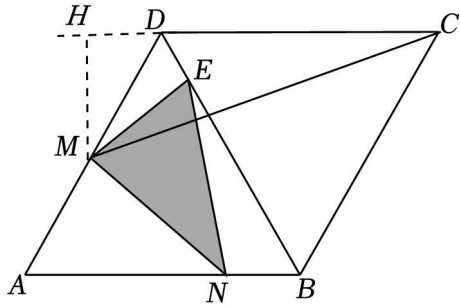
故①正确；

$$\therefore \angle DME = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle BEN = \angle DME = 15^\circ$$

$$\therefore \angle ENB = 180^\circ - 60^\circ - 15^\circ = 105^\circ, \text{ 故②正确；}$$

如图,作  $MH \perp CD$  交  $CD$  的延长线于点  $H$ ,



在  $Rt\triangle DMH$  中,  $\angle H = 90^\circ$ , 由①得:  $\angle ADB = \angle BDC = 60^\circ$ ,

$\therefore \angle MDH = 60^\circ, \angle DMH = 30^\circ$ ,

$\therefore M$  是  $AD$  的中点,

$\therefore DM = 2$ ,

$\therefore DH = 1, MH = DM \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$ ,

$\therefore CM = \sqrt{MH^2 + CH^2} = 2\sqrt{7}$ , 故③错误;

设  $DE = 2a, BE = 5a$ , 则  $AB = AD = BD = 7a$ , 设  $BN = x$ , 则  $AN = EN = 7a - x$ ,

$\therefore \triangle MED \sim \triangle ENB$ ,

$\therefore \frac{ME}{EN} = \frac{ED}{BN} = \frac{DM}{EB}$ ,

$\therefore \frac{ME}{7a-x} = \frac{2a}{x} = \frac{DM}{5a}$ ,

$\therefore EM = AM = \frac{2a(7a-x)}{x}, DM = \frac{10a^2}{x}$ ,

$\therefore AM + DM = 7a$ ,

$\therefore \frac{2a(7a-x)}{x} + \frac{10a^2}{x} = 7a$ ,

解得:  $x = \frac{8}{3}a$ ,

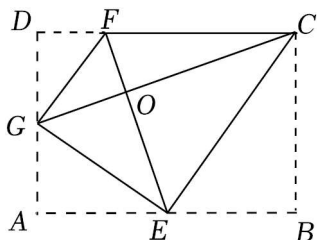
$\therefore AM = \frac{13}{4}a, AN = \frac{13}{3}a$ ,

$\therefore AM:AN = 3:4$ ,

故④正确;

故答案为:①②④.

28. 如图,将矩形  $ABCD$  沿着  $GE, EC, GF$  翻折,使得点  $A, B, D$  恰好都落在点  $O$  处,且点  $G, O, C$  在同一条直线上,同时点  $E, O, F$  在另一条直线上. 小炜同学得出以下结论:①  $GF \parallel EC$ ;②  $AB = \frac{4\sqrt{3}}{5}AD$ ;③  $GE = \sqrt{6}DF$ ;④  $OC = 2\sqrt{2}OF$ ;⑤  $\triangle COF \sim \triangle CEG$ . 其中正确的是 ①③④.



【解答】解:由折叠性质可得,  $DG = OG = AG, AE = OE = BE, OC = BC, \angle DGF = \angle FGO, \angle AGE = \angle OGE, \angle AEG = \angle OEG, \angle OEC = \angle BEC, \angle BCE = \angle OCE$ ,

$\therefore \angle FGE = \angle FGO + \angle OGE = 90^\circ, \angle GEC = \angle OEG + \angle OEC = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle FGE + \angle GEC = 180^\circ$ ,

$\therefore GF \parallel CE$ , 故①正确;

设  $AD = BC = 2a, AB = 2b$ , 则  $DG = OG = AG = a, AE = OE = BE = b$ ,

$\therefore CG = OG + OC = 3a$ ,

在  $Rt\triangle CGE$  中,  $CG^2 = GE^2 + CE^2$ ,

$$\therefore (3a)^2 = a^2 + b^2 + b^2 + (2a)^2,$$

解得  $b = \sqrt{2}a$ ,

$\therefore AB = \sqrt{2}AD$ , 故②错误;

在  $Rt\triangle COF$  中, 设  $OF = DF = x$ , 则  $CF = 2b - x = 2\sqrt{2}a - x$ ,

$$\therefore x^2 + (2a)^2 = (2\sqrt{2}a - x)^2,$$

解得  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ ,

$$\therefore \sqrt{6}DF = \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{2}}{2}a = \sqrt{3}a, 2\sqrt{2}OF = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}a = 2a,$$

在  $Rt\triangle AGE$  中,

$$GE = \sqrt{AG^2 + AE^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (\sqrt{2}a)^2} = \sqrt{3}a,$$

$\therefore GE = \sqrt{6}DF$ ,  $OC = 2\sqrt{2}OF$ , 故③④正确;

$$\therefore CE = \sqrt{BC^2 + BE^2} = \sqrt{(2a)^2 + b^2} = \sqrt{(2a)^2 + (\sqrt{2}a)^2} = \sqrt{6}a,$$

$$\therefore \frac{CE}{GE} = \frac{\sqrt{6}a}{\sqrt{3}a} = \sqrt{2},$$

$$\text{又} \because \frac{CO}{OF} = \frac{2a}{\frac{\sqrt{2}}{2}a} = 2\sqrt{2},$$

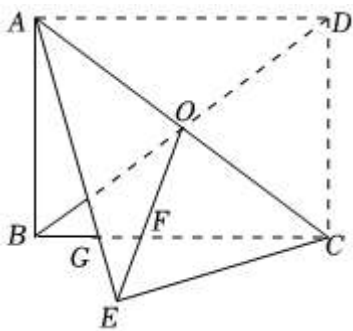
$$\therefore \frac{CE}{GE} \neq \frac{CO}{OF},$$

$\therefore \triangle COF$  与  $\triangle CEG$  不相似, 故⑤错误;

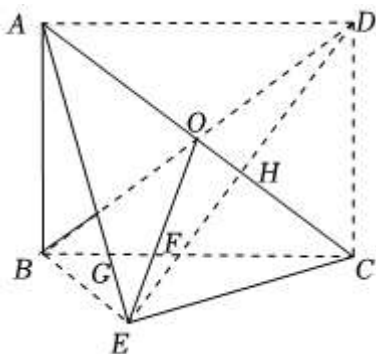
综上, 正确的是①③④,

故答案为: ①③④.

29. 如图, 矩形  $ABCD$  的对角线  $AC$  和  $BD$  交于点  $O$ ,  $AB = 3$ ,  $BC = 4$ . 将  $\triangle ADC$  沿着  $AC$  折叠, 使点  $D$  落在点  $E$  处, 连接  $OE$  交  $BC$  于点  $F$ ,  $AE$  交  $BC$  于点  $G$ , 则  $EF = \frac{35}{39}$ .



【解答】解: 如图, 连接  $DE$ ,  $BE$ , 设  $DE$  交  $AC$  于点  $H$ ,



$\because$  矩形  $ABCD$  中,  $AB = 3$ ,  $BC = 4$ ,

$$\therefore AC = BD = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5,$$

$\because$  矩形  $ABCD$  的对角线  $AC$  和  $BD$  交于点  $O$ , 将  $\triangle ADC$  沿着  $AC$  折叠, 使点  $D$  落在点  $E$  处,

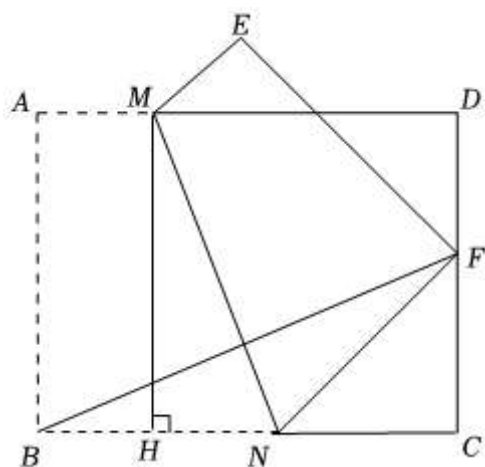
$$\therefore DE \perp AC, OE = OC = OD = 5,$$

$$\begin{aligned}
&\because S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}AD \times DC = \frac{1}{2}AC \times DH, \\
&\therefore DH = \frac{AD \times DC}{AC} = \frac{12}{5}, \\
&\therefore CH = \sqrt{DC^2 - DH^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{9}{5}, \\
&\therefore OH = OC - HC = \frac{5}{2} - \frac{9}{5} = \frac{7}{10}, \\
&\because DH = HE, OD = OB, \\
&\therefore OH \text{ 是 } \triangle BDE \text{ 的中位线, } C \\
&\therefore OH = \frac{1}{2}BE, OH \parallel BE, \\
&\therefore BE = \frac{7}{5}, \angle OCF = \angle FBE, \\
&\text{又 } \because \angle OFC = \angle BFE, \\
&\therefore \triangle OFC \sim \triangle EFB, \\
&\therefore \frac{OF}{EF} = \frac{OC}{BE}, \\
&\therefore \frac{OF}{EF} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{7}{5}} = \frac{25}{14}, \\
&\therefore OE = OF + FE = \frac{5}{2}, \text{ 即 } EF + \frac{25}{14}EF = \frac{39}{14}EF = \frac{5}{2}, \\
&\therefore EF = \frac{35}{39}. \\
&\text{故答案为: } \frac{35}{39}.
\end{aligned}$$

30. 如图, 在矩形  $ABCD$  中,  $AB=6$ ,  $BC=8$ , 点  $M, N$  分别在边  $AD, BC$  上. 沿着直线  $MN$  折叠矩形  $ABCD$ , 点  $A, B$  分别落在点  $E, F$  处, 且点  $F$  在线段  $CD$  上 (不与两端点重合), 过点  $M$  作  $MH \perp BC$  于点  $H$ , 连接  $BF$ . 已知下列判断:

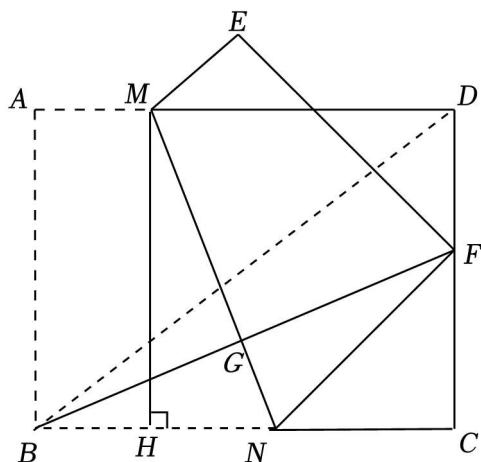
- ①  $MN \perp BF$ ;
- ②  $\triangle MHN \sim \triangle BCF$ ;
- ③  $\frac{MN}{BF} = \frac{3}{4}$ ;
- ④  $6 < MN < \frac{15}{2}$ .

其中正确的是 ①②③④. (填写所有正确结论的序号)



**【解答】**解: 连接  $BD$ , 设  $BF$  交  $MN$  于点  $G$ ,  
 $\because$  四边形  $ABCD$  是矩形,  $AB=6$ ,  $BC=8$ ,  
 $\therefore CD=AB=6$ ,  $\angle A = \angle ABC = \angle C = 90^\circ$ ,  
 $\therefore BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ ,

$\because MH \perp BC$  于点  $H$ ,  
 $\therefore \angle MHN = \angle MHB = 90^\circ$ ,  
 $\because \angle A = \angle ABH = \angle MHB = 90^\circ$ ,  
 $\therefore$  四边形  $ABHM$  是矩形,  
 $\therefore MH = AB = 6$ ,  
 由折叠得点  $F$  与点  $B$  关于直线  $MN$  对称,  
 $\therefore MN$  垂直平分  $BF$ ,  
 $\therefore MN \perp BF$ ,  $\angle BGN = 90^\circ$ ,  
 故①正确;  
 $\because \angle MHN = \angle C = 90^\circ$ ,  $\angle HMN = \angle CBF = 90^\circ - \angle BNM$ ,  
 $\therefore \triangle MHN \sim \triangle BCF$ ,  
 故②正确;  
 $\therefore \frac{MN}{BF} = \frac{MH}{BC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ ,  
 故③正确;  
 $\because F$  在线段  $CD$  上, 且不与两端点重合,  
 $\therefore MN > MH$ , 且  $BF < BD$ ,  
 $\therefore MN > 6$ , 且  $BF < 10$ ,  
 $\therefore BF = \frac{4}{3}MN$ ,  
 $\therefore MN > 6$ , 且  $\frac{4}{3}MN < 10$ ,  
 $\therefore 6 < MN < \frac{15}{2}$ ,  
 故④正确,  
 故答案为:①②③④.



31. 如图, 已知正方形  $ABCD$ , 点  $E$  在边  $CD$  上, 点  $F$  在边  $AD$  的延长线上, 且  $DE = DF$ . 连接  $AE$  并延长, 交  $CF$  于点  $G$ .

(1) 如图 1, ①求证:  $AG \perp CF$ ; ②连接  $DG$ , 求  $\angle AGD$  的度数;

(2) 如图 2, 若  $\frac{DE}{DC} = \frac{1}{3}$ , 求  $\frac{CG}{CF}$  的值.



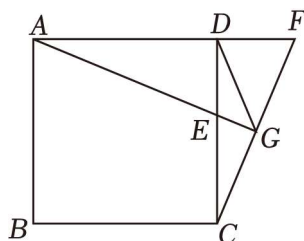


图 1

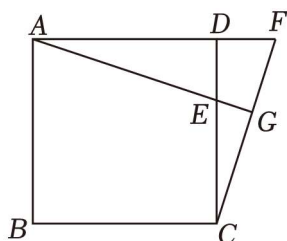


图 2

【解答】解：(1) ①证明： $\because$  四边形  $ABCD$  是正方形，

$\therefore AD = DC$ ， $\angle ADC = 90^\circ$ ，则  $\angle CDF = 90^\circ$ ，

又  $\because DE = DF$ ，

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDF (SAS)$ ，

$\therefore \angle DAE = \angle DCF$ ，

$\because \angle DAE + \angle AED = 90^\circ$ ， $\angle AED = \angle CEG$ ，

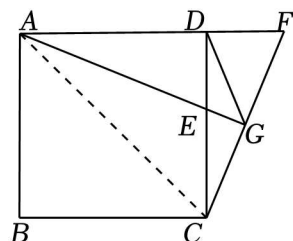
$\therefore \angle CEG + \angle DCF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle EGC = 90^\circ$ ，即： $AG \perp CF$ ；

②连接  $AC$ ，

$\because AD = DC$ ， $\angle ADC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ACD = 45^\circ$ ，

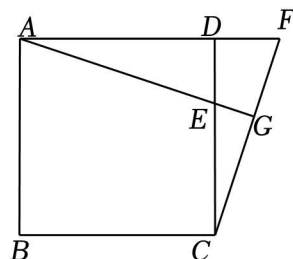


由①可知， $\angle ADC = \angle AGC = 90^\circ$ ，则点  $A$ 、 $D$ 、 $G$ 、 $C$  四点共圆，

$\therefore \angle AGD = \angle ACD = 45^\circ$ ；

(2)  $\because \frac{DE}{DC} = \frac{1}{3}$ ，设  $DE = DF = a$ ，则  $DC = AD = 3a$ ，

$\therefore CF = \sqrt{DC^2 + DF^2} = \sqrt{10}a$ ， $CE = DC - DE = 2a$ ，



由 (1) 可知， $\triangle ADE \cong \triangle CDF$ ，

$\therefore AE = CF = \sqrt{10}a$ ， $\angle DAE = \angle GCE$

$\because \angle ADE = \angle CGE = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle CGE$ ，

$\therefore \frac{AD}{CE} = \frac{AE}{CG}$ ，即  $\frac{3a}{2a} = \frac{\sqrt{10}a}{CG}$ ，

$\therefore CG = \frac{2\sqrt{10}}{3}a$ ，

$\therefore \frac{CG}{CF} = \frac{\frac{2\sqrt{10}}{3}a}{\sqrt{10}a} = \frac{2}{3}$ 。

32. 阅读与思考：

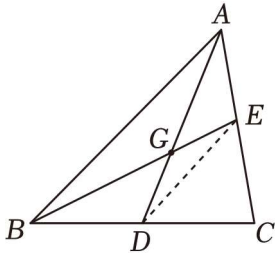
三角形的重心

定义：三角形三条中线相交于一点，这个交点叫做三角形的重心。

三角形重心的一个重要性质：重心与一边中点的连线的长是对应中线长的  $\frac{1}{3}$ 。

(1) 下面是小明证明性质的过程。

如图，在  $\triangle ABC$  中， $D$ 、 $E$  分别是边  $BC$ 、 $AC$  的中点， $AD$ 、 $BE$  相交于点  $G$ 。求证： $\frac{GE}{BE} = \frac{GD}{AD} = \frac{1}{3}$ 。



证明：连接  $ED$ ，

$\because D, E$  是边  $BC, AC$  的中点，

$\therefore DE \parallel AB, \frac{DE}{AB} = \frac{1}{2}$  (依据 1)，

$\therefore \triangle ABG \sim \triangle DEG$ ，

$\therefore \frac{GE}{GB} = \frac{GD}{GA} = \frac{DE}{AB} = \frac{1}{2}$  (依据 2)，

$\therefore \frac{GE}{BE} = \frac{GD}{AD} = \frac{1}{3}$ 。

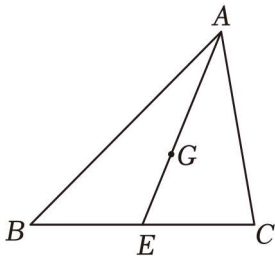
任务一，在小明的证明过程中，依据 1 和依据 2 的内容分别是：

依据 1: 三角形的中位线定理；

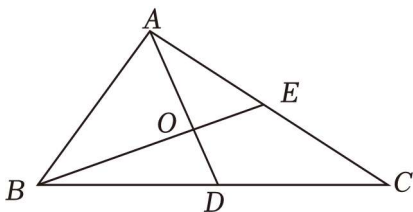
依据 2: 相似三角形的性质。

(2) 应用

① 如图，在  $\triangle ABC$  中，点  $G$  是  $\triangle ABC$  中的重心，连接  $AG$  并延长交  $BC$  与点  $E$ ，若  $GE = 3.5$ ，求  $AG$  长。



② 在  $\triangle ABC$  中，中线  $AD$ 、 $BE$  相交于点  $O$ ，若  $\triangle ABC$  的面积等于 30，求  $\triangle BOD$  的面积。



【解答】解：(1) 依据 1: 三角形的中位线定理；

依据 2: 相似三角形的性质；

故答案为：三角形的中位线定理；相似三角形的性质；

(2) ①  $\because G$  是  $\triangle ABC$  的重心，

$\therefore AE = 3GE$ ，

$\because GE = 3.5$ ，

$\therefore AG = 2GE = 7$ ，

$\therefore AG$  的长为 7；

②  $\because AD$  是  $BC$  边上的中线，

$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = 15$ ，

$\because$  中线  $AD$ 、 $BE$  相交于点  $O$ ,  
 $\therefore$  点  $O$  是  $\triangle ABC$  的重心,  
 $\therefore AD:OD = 3:1$ ,  
 $\therefore S_{\triangle BOD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABD} = \frac{1}{3} \times 15 = 5$ ,  
 $\therefore \triangle BOD$  的面积为 5.

33. 为测量水平操场上旗杆的高度,九(2)班各学习小组运用了多种测量方法.

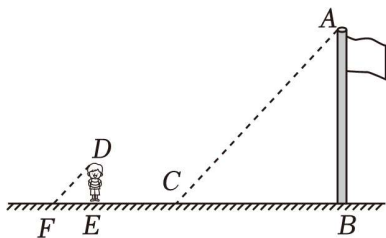


图 1 (利用影子)

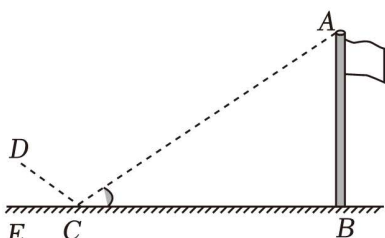


图 2 (利用镜子)

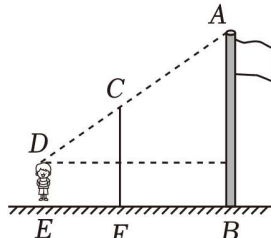


图 3 (利用标杆)

(1) 如图 1, 小张在测量时发现, 自己在操场上的影长  $EF$  恰好等于自己的身高  $DE$ . 此时, 小组同学测得旗杆  $AB$  的影长  $BC$  为  $11.3m$ , 据此可得旗杆高度为 11.3 m;

(2) 如图 2, 小李站在操场上  $E$  点处, 前面水平放置镜面  $C$ , 并通过镜面观测到旗杆顶部  $A$ . 小组同学测得小李的眼睛距地面高度  $DE = 1.5m$ , 小李到镜面距离  $EC = 2m$ , 镜面到旗杆的距离  $CB = 16m$ . 求旗杆高度;

(3) 小王所在小组采用图 3 的方法测量, 结果误差较大. 在更新测量工具, 优化测量方法后, 测量精度明显提高, 研学旅行时, 他们利用自制工具, 成功测量了江姐故里广场雕塑的高度. 方法如下:

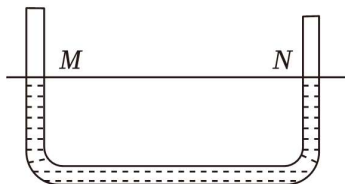


图 4 (找水平线)



图 5 (找定标高线)

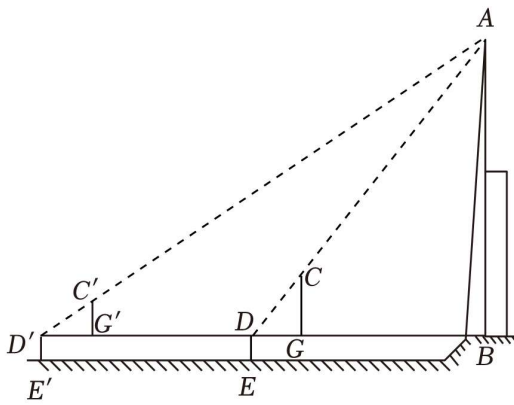


图 6 (测雕塑高)

如图 4, 在透明的塑料软管内注入适量的水, 利用连通器原理, 保持管内水面  $M$ ,  $N$  两点始终处于同一水平线上.

如图 5, 在支架上端  $P$  处, 用细线系小重物  $Q$ , 标高线  $PQ$  始终垂直于水平地面.

如图 6, 在江姐故里广场上  $E$  点处, 同学们用注水管确定与雕塑底部  $B$  处于同一水平线的  $D$ ,  $G$  两点, 并标记观测视线  $DA$  与标高线交点  $C$ , 测得标高  $CG = 1.8m$ ,  $DG = 1.5m$ . 将观测点  $D$  后移  $24m$  到  $D'$  处. 采用同样方法, 测得  $C'G' = 1.2m$ ,  $D'G' = 2m$ . 求雕塑高度 (结果精确到  $1m$ ).

**【解答】**解: (1)  $\because$  影长  $EF$  恰好等于自己的身高  $DE$ ,

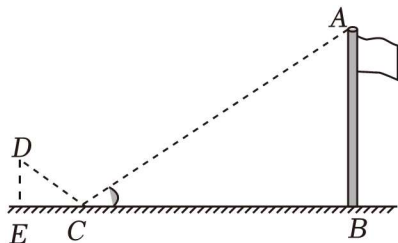
$\therefore \triangle DEF$  是等腰直角三角形,

由平行投影性质可知,  $\triangle ABC$  是等腰直角三角形,

$\therefore AB = BC = 11.3m$ ,

故答案为: 11.3;

(2) 如图:



由反射定律可知,  $\angle DCE = \angle ACB$ ,

又  $\angle DEC = 90^\circ = \angle ABC$ ,

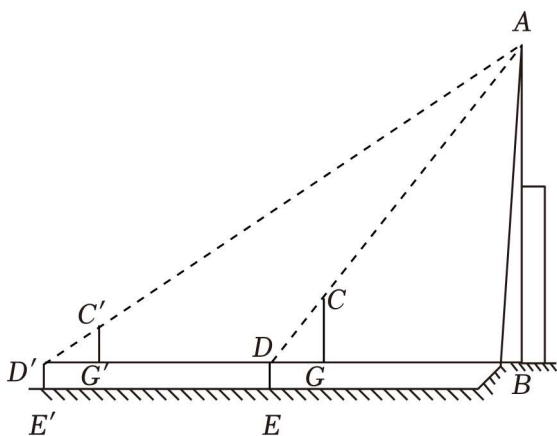
$\therefore \triangle DEC \sim \triangle ABC$ ,

$$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{CE}, \text{ 即 } \frac{AB}{1.5} = \frac{16}{2},$$

解得  $AB = 12$ ,

$\therefore$  旗杆高度为 12 米;

(3) 如图:



$\therefore \angle CDG = \angle ADB$ ,  $\angle CGD = 90^\circ = \angle ABD$ ,

$\therefore \triangle DCG \sim \triangle DAB$ ,

$$\therefore \frac{CG}{AB} = \frac{DG}{DB},$$

设  $AB = x$  m,  $BD = y$  m, 则  $\frac{1.8}{x} = \frac{1.5}{y}$ ,

$$\therefore y = \frac{5}{6}x,$$

同理可得  $\frac{C'G'}{AB} = \frac{D'G'}{D'B}$ ,

$$\therefore \frac{1.2}{x} = \frac{2}{24+y},$$

$$\therefore \frac{1.2}{x} = \frac{2}{24 + \frac{5}{6}x},$$

解得  $x = 28.8$ ;

经检验,  $x = 28.8$  是原方程的解,

故  $AB \approx 29$  m,

$\therefore$  雕塑高度  $AB$  约为 29 m.

34. 【感知】(1) 小明同学在学习相似三角形时遇到这样一个问题:

如图①, 在  $\triangle ABC$  中, 点  $D$  是  $BC$  的中点, 点  $E$  是  $AC$  的一个三等分点, 且  $AE = \frac{1}{3}AC$ . 连结  $AD$ ,  $BE$  交于点  $G$ ,

求  $\frac{BG}{GE}$  值.

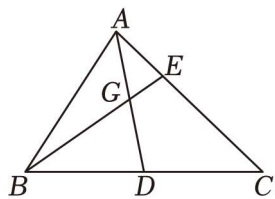
小明发现, 过点  $D$  作  $AC$  的平行线或过  $E$  作  $BC$  的平行线, 利用相似三角形的性质即可得到问题的答案. 请你根据小明的提示 (或按自己的思路) 写出求解过程.

【尝试应用】

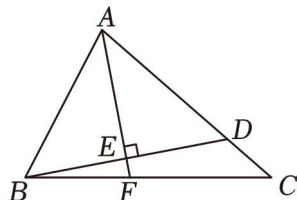
(2) 如图②, 在  $\triangle ABC$  中,  $D$  为  $AC$  上一点,  $AB = AD$ , 连结  $BD$ , 若  $AE \perp BD$ , 交  $BD$ 、 $BC$  于点  $E$ 、 $F$ . 若  $AD = 9$ ,  $CD = 3$ ,  $AF = 8$ , 则  $AE$  的长为 7.

【拓展提高】

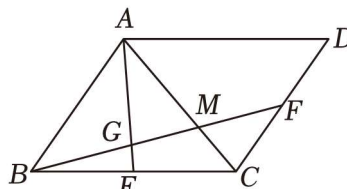
(3) 如图③, 在平行四边形  $ABCD$  中, 点  $E$  为  $BC$  的中点, 点  $F$  为  $CD$  上一点,  $BF$  与  $AE$ 、 $AC$  分别交于点  $G$ 、 $M$ , 若  $\frac{CF}{CD} = \frac{2}{5}$ , 若  $\triangle BEG$  的面积为 2, 则  $\triangle ABG$  的面积为         .



图①



图②



图③

【解答】解: (1) 如图①, 过点  $D$  作  $DH \parallel AC$  交  $BE$  于  $H$ , 则  $\angle EAG = \angle HDG$ ,  $\angle AEG = \angle DHG$ ,

$\because D$  是  $BC$  的中点,

$$\therefore BD = CD,$$

$$\therefore \frac{BH}{EH} = \frac{BD}{CD} = 1,$$

$$\therefore BH = EH,$$

$$\therefore DH = \frac{1}{2}CE,$$

$\because E$  是  $AC$  的一个三等分点, 且  $AE = \frac{1}{3}AC$ ,

$$\therefore AE = \frac{1}{2}CE,$$

$$\therefore DH = AE,$$

$$\therefore \triangle AGE \cong \triangle DGH(ASA),$$

$$\therefore GH = GE,$$

$$\therefore BG - GH = GE + GH,$$

$$\therefore BG = 3GE,$$

$$\therefore \frac{BG}{EG} = 3,$$

$$\therefore \frac{BG}{EG} \text{ 的值为 } 3.$$

(2) 如图②, 取  $BC$  的中点  $H$ , 连结  $EH$ , 则  $BH = CH$ ,

$\because AB = AD = 9$ ,  $AE \perp BD$  于点  $E$ ,  $CD = 3$ ,  $AF = 8$ ,

$$\therefore BE = DE, AC = AD + CD = 9 + 3 = 12,$$

$$\therefore EH \parallel CD, EH = \frac{1}{2}CD = \frac{3}{2},$$

$$\therefore EH \parallel AC,$$

$$\therefore \triangle EHF \sim \triangle ACF,$$

$$\therefore \frac{EF}{AF} = \frac{EH}{AC} = \frac{1}{8},$$

$$\therefore EF = \frac{1}{8}AF = \frac{1}{8} \times 8 = 1,$$

$$\therefore AE = AF - EF = 8 - 1 = 7,$$

故答案为: 7.

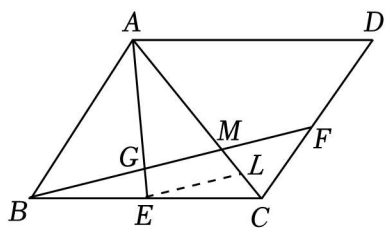
(3) 如图③, 作  $EL \parallel BF$  交  $AC$  于点  $L$ ,

$\because$  点  $E$  为  $BC$  的中点,

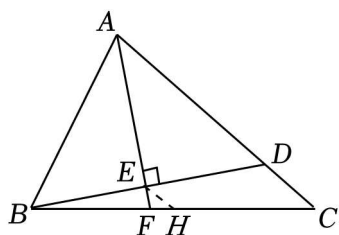
$$\therefore BE = CE,$$

$$\therefore \frac{ML}{CL} = \frac{BE}{CE},$$

$\therefore CM = 2ML$ ,  
 $\because$  四边形  $ABCD$  是平行四边形,  
 $\therefore CD \parallel AB, CD = AB$ ,  
 $\therefore CF \parallel AB$ ,  
 $\therefore \triangle CMF \sim \triangle AMB$ ,  
 $\therefore \frac{CM}{AM} = \frac{CF}{AB} = \frac{CF}{CD} = \frac{2}{5}$ ,  
 $\therefore EL \parallel GM$ ,  
 $\therefore \frac{AG}{EG} = \frac{AM}{ML} = \frac{AM}{\frac{1}{2}CM} = \frac{2AM}{CM}$ ,  
 $\therefore AG = 5EG$ ,  
 $\therefore S_{\triangle ABG} = 5S_{\triangle BEG}$ ,  
 $\therefore \triangle BEG$  的面积为 2,  
 $\therefore \triangle ABG$  的面积  $= 2 \times 5 = 10$ ,  
 故答案为: 10.



图③



图②

35. 问题情境: 数学活动课上, 王老师给同学们每人发了一张矩形纸片探究折叠的性质在矩形  $ABCD$  的  $CD$  边上取一点  $E$ , 将  $\triangle BCE$  沿  $BE$  翻折, 使点  $C$  恰好落在  $AD$  边上点  $F$  处.

实践探究: (1) 如图 1, 若  $BC = 2BA$ , 求  $\angle CBE$  的度数;

(2) 如图 2, 当  $AB = 6$ , 且  $AF \cdot FD = 12$  时, 求  $BC$  的长;

问题解决: (3) 如图 3, 延长  $EF$ , 与  $\angle ABF$  的角平分线交于点  $M$ ,  $BM$  交  $AD$  于点  $N$ , 当  $NF = AN + FD$  时, 求  $\frac{AB}{BC}$  的值.

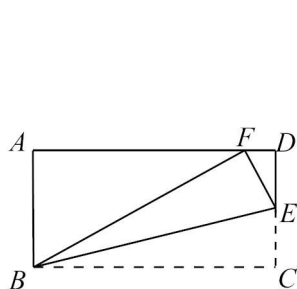


图1

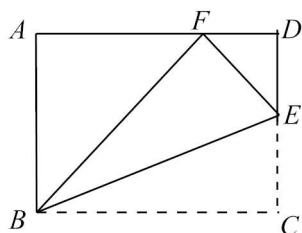


图2

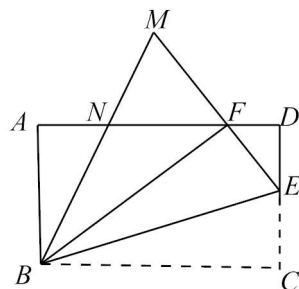


图3

【解答】解: (1)  $\because$  四边形  $ABCD$  是矩形,  
 $\therefore \angle C = 90^\circ$ ,

∵ 将  $\triangle BCE$  沿  $BE$  翻折, 使点  $C$  恰好落在  $AD$  边上点  $F$  处,

$$\therefore BC = BF, \angle FBE = \angle EBC, \angle C = \angle BFE = 90^\circ,$$

$$\therefore BC = 2AB,$$

$$\therefore BF = 2AB,$$

$$\therefore \angle AFB = 30^\circ,$$

∵ 四边形  $ABCD$  是矩形,

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle AFB = \angle CBF = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle CBE = \frac{1}{2} \angle FBC = 15^\circ;$$

(2) ∵ 将  $\triangle BCE$  沿  $BE$  翻折, 使点  $C$  恰好落在  $AD$  边上点  $F$  处,

$$\therefore \angle BFE = \angle C = 90^\circ, CE = EF,$$

又 ∵ 矩形  $ABCD$  中,  $\angle A = \angle D = 90^\circ$ ,

$$\therefore \angle AFB + \angle DFE = 90^\circ, \angle DEF + \angle DFE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFB = \angle DEF,$$

$$\therefore \triangle FAB \sim \triangle EDF,$$

$$\therefore \frac{AF}{DE} = \frac{AB}{DF},$$

$$\therefore AF \cdot DF = AB \cdot DE,$$

$$\therefore AF \cdot DF = 12, AB = 6,$$

$$\therefore DE = 2,$$

$$\therefore CE = DC - DE = 6 - 2 = 4,$$

$$\therefore EF = 4,$$

$$\therefore DF = \sqrt{EF^2 - DE^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore AF = \frac{12}{2\sqrt{3}} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore BC = AD = AF + DF = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3};$$

(3) 过点  $N$  作  $NG \perp BF$  于点  $G$ ,

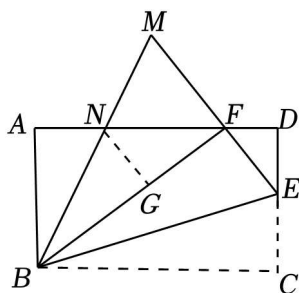


图3

$$\therefore NF = AN + FD,$$

$$\therefore NF = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} BC,$$

$$\therefore BC = BF,$$

$$\therefore NF = \frac{1}{2} BF,$$

$$\therefore \angle NFG = \angle AFB, \angle NGF = \angle BAF = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle NFG \sim \triangle BFA,$$

$$\therefore \frac{NG}{AB} = \frac{FG}{FA} = \frac{FN}{BF} = \frac{1}{2},$$

设  $AN = x$ ,

$$\therefore BN \text{ 平分 } \angle ABF, AN \perp AB, NG \perp BF,$$

$$\therefore AN = NG = x, AB = BG = 2x,$$

设  $FG = y$ , 则  $AF = 2y$ ,

$$\because AB^2 + AF^2 = BF^2,$$

$$\therefore (2x)^2 + (2y)^2 = (2x + y)^2,$$

$$\text{解得 } y = \frac{4}{3}x,$$

$$\therefore BF = BG + GF = 2x + \frac{4}{3}x = \frac{10}{3}x,$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{BF} = \frac{2x}{\frac{10}{3}x} = \frac{3}{5}.$$