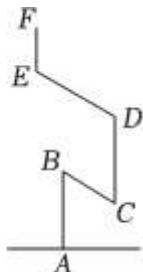


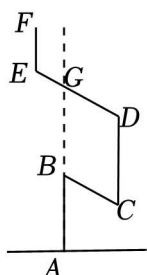
初一数学期末复习——中考假期定心卷

参考答案与解析

1. 电动曲臂式高空作业车在高空作业时只需一个人就可操作机器连续完成升降、前进、后退、转向等动作,极大地减少了操作人员的数量和劳动强度. 如图所示是一辆正在工作的电动曲臂式高空作业车,其中 $AB \parallel CD \parallel EF$, $BC \parallel DE$. 若 $\angle ABC = 60^\circ$, 则 $\angle DEF$ 的大小为 120°



【解答】解: 延长 AB 交 DE 于点 G ,



$$\because BC \parallel ED, \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BGD = \angle ABC = 60^\circ,$$

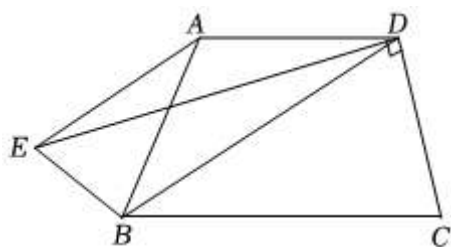
$$\therefore \angle BGE = 180^\circ - \angle BGD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

$$\because AB \parallel EF,$$

$$\therefore \angle DEF = \angle BGE = 120^\circ.$$

故答案为: 120° .

2. 已知如图, $AD \parallel BC$, $BD \parallel AE$, DE 平分 $\angle ADB$, 且 $ED \perp CD$, 若 $\angle AED + \angle BAD = 128^\circ$, 则 $\angle BCD - \angle EAB =$ 38 度.



【解答】解: 设 $\angle ADE = x$,

$$\because DE \text{ 平分 } \angle ADB,$$

$$\therefore \angle EDB = \angle ADE = x,$$

$$\text{又 } \because ED \perp CD,$$

$$\therefore \angle EDC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = 90^\circ - x,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DBC = \angle ADB = 2x, \angle BCD = 180^\circ - (90^\circ - x + 2x) = 90^\circ - x,$$

$$\because BD \parallel AE,$$

$$\therefore \angle AED = \angle EDB = x,$$

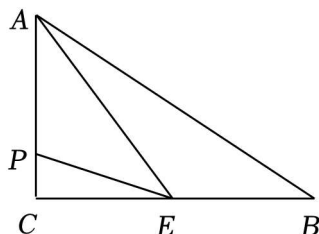
$$\because \angle AED + \angle BAD = 128^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = 128^\circ - x, \angle EAB = 180^\circ - (128^\circ - x + 2x) = 52^\circ - x,$$

$$\therefore \angle BCD - \angle EAB = (90^\circ - x) - (52^\circ - x) = 38^\circ.$$

故答案为: 38.

3. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 8\text{cm}$, $AC = 6\text{cm}$, 点 E 是 BC 的中点, 动点 P 从 A 点出发, 以每秒 2cm 的速度沿 $A \rightarrow C \rightarrow E$ 运动. 若设点 P 运动的时间是 $t\text{s}$, 那么当 $t = \underline{2}$ 或 $\underline{\frac{11}{3}}$ s 时, $\triangle APE$ 的面积等于 8.



【解答】解: $\because BC = 8\text{cm}$, 点 E 是 BC 的中点,

$$\therefore CE = \frac{1}{2}BC = 4\text{cm},$$

当点 P 在线段 AC 上, 如图 1 所示, $AP = 2t$,

$$\because \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore S_{\triangle APE} = \frac{1}{2}AP \cdot CE = \frac{1}{2} \times 2t \times 4 = 4t = 8,$$

解得: $t = 2$;

当点 P 在线段 CE 上, 如图 2 所示, $AC = 6\text{cm}$, $PE = 10 - 2t$,

$$\therefore S_{\triangle APE} = \frac{1}{2}PE \cdot AC = \frac{1}{2} \times (10 - 2t) \times 6 = 8,$$

$$\text{解得: } t = \frac{11}{3}.$$

故答案为: 2 或 $\frac{11}{3}$.

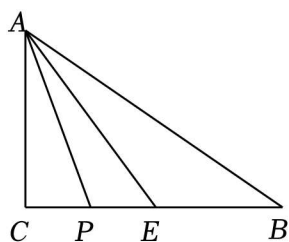


图2

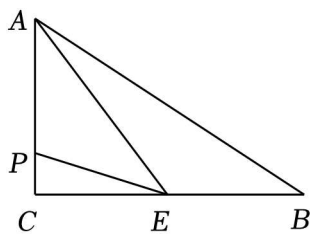
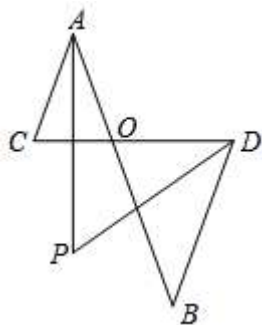


图1

4. 如图, AB 和 CD 相交于点 O , $\angle C = \angle COA$, $\angle BDC = \angle BOD$, AP , DP 分别平分 $\angle CAO$ 和 $\angle BDC$, 若 $\angle C + \angle P + \angle B = 165^\circ$, 则 $\angle C$ 的度数是 $\underline{\quad\quad} 70^\circ \underline{\quad\quad}$.



【解答】解： $\because \angle C = \angle COA, \angle BDC = \angle BOD, \angle AOC = \angle BOD,$

$\therefore \angle C = \angle AOC = \angle BOD = \angle BDO,$

$\therefore \angle B = \angle CAO,$ 设 $\angle C = \angle AOC = \angle BOD = \angle BDO = x, \angle CAP = \angle PAB = y, \angle P = z,$ 则 $\angle B = 2y,$

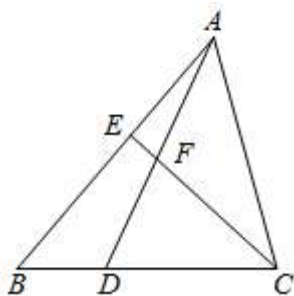
$$\text{则有} \begin{cases} 2x + 2y = 180^\circ \\ x + y = z + \frac{1}{2}x \\ x + z + 2y = 165^\circ \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 70^\circ \\ y = 20^\circ \\ z = 55^\circ \end{cases}$$

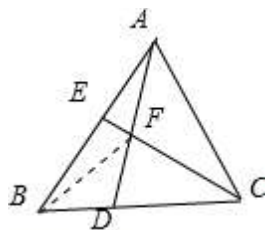
$\therefore \angle C = 70^\circ,$

故答案为 70° .

5. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 E 是 AB 边上的点, 且 $AE:EB = 2:3$, 点 D 是 BC 边上的点, 且 $BD:DC = 1:2$, AD 与 CE 相交于点 F , 若四边形 $BDFE$ 的面积是 16, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 60.



【解答】解: 连接 FB , 如图所示:



设 $S_{\triangle BDF} = a, S_{\triangle BEF} = b,$

$$\because \frac{AE}{EB} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore S_{\triangle AEF} = \frac{2}{3}b,$$

$$\because BD:DC = 1:2,$$

$$\therefore S_{\triangle CDF} = 2a,$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}\left(16 + \frac{2}{3}b\right),$$

$$S_{\triangle ACE} = \frac{2}{3}(16 + 2a),$$

$$\because S_{\triangle ACF} = S_{\triangle ACD} - S_{\triangle CDF} = S_{\triangle ACE} - S_{\triangle AEF},$$

$$\therefore 32 + \frac{4}{3}b - 2a = \frac{2}{3}(16 + 2a) - \frac{2}{3}b,$$

$$\therefore 10a - 6b = 64,$$

$$\therefore a + b = 16,$$

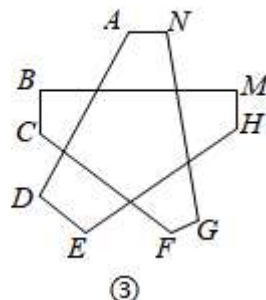
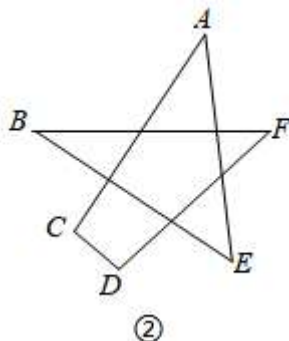
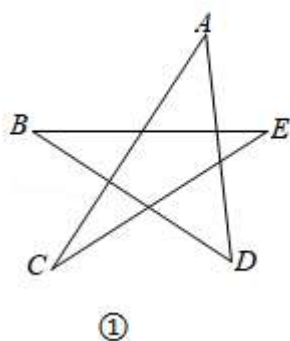
$$\begin{cases} 5a - 3b = 32 \\ a + b = 16 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = 10 \\ b = 6 \end{cases},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle AEF} + S_{\text{四边形}BDFE} = \left(32 + \frac{4}{3}b\right) + \frac{2}{3}b + 16 = 40 + 20 = 60.$$

故答案为: 60.

6. 若对图1中星形截去一个角,如图2,再对图2中的角进一步截去,如图3,则图中的 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G + \angle H + \angle M + \angle N =$ 1080 度.



【解答】解:根据图中可得出规律 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 180^\circ$, 每截去一个角则会增加 180 度, 所以当截去 5 个角时增加了 180×5 度,

则 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G + \angle H + \angle M + \angle N = 180 \times 5 + 180 = 1080^\circ$.

$$7. \text{计算: } -8^{2005} \times (-0.125)^{2006} = \underline{\quad\quad} - 0.125 \underline{\quad\quad}.$$

$$\text{【解答】解: } -8^{2005} \times (-0.125)^{2006},$$

$$= -8^{2005} \times (-0.125)^{2005} \times (-0.125),$$

$$= (8 \times 0.125)^{2005} (-0.125),$$

$$= -0.125.$$

$$8. \text{已知 } a^3 \cdot a^m \cdot a^{2m+1} = a^{25} (a \neq 1, a \neq 0), \text{求 } m \text{ 的值 } \underline{7}.$$

$$\text{【解答】解: } \because a^3 \cdot a^m \cdot a^{2m+1} = a^{25} (a \neq 1, a \neq 0),$$

$$\therefore a^{3+m+2m+1} = a^{25},$$

$$\therefore 3 + m + 2m + 1 = 25,$$

$$\text{解得 } m = 7,$$

故填 7.

$$9. \text{已知 } m = \frac{15^4}{3^{44}}, n = \frac{5^4}{3^{40}}, \text{那么 } 2016^{m-n} = \underline{1}.$$

$$\text{【解答】解: } \because m = \frac{15^4}{3^{44}} = \frac{3^4 \cdot 5^4}{3^{44}} = \frac{5^4}{3^{40}},$$

$$\therefore m = n,$$

$$\therefore 2016^{m-n} = 2016^0 = 1.$$

故答案为: 1.

$$10. \text{已知 } m, n, x, y \text{ 满足 } mn = 2015^{2015}, \frac{1}{1+2015^x m} + \frac{1}{1+2015^{y-2014} n} = 1, \text{则 } 2015^{x+y} = \underline{\quad\quad} \frac{1}{2015} \underline{\quad\quad}.$$

$$\text{【解答】解: } \because \frac{1}{1+2015^x m} + \frac{1}{1+2015^{y-2014} n} = 1,$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \frac{1+2015^{y-2014}n+1+2015^xm}{(1+2015^xm)(1+2015^{y-2014}n)}=1, \\
&\therefore 1+2015^{y-2014}n+1+2015^xm=(1+2015^xm)(1+2015^{y-2014}m), \\
&\therefore 1+2015^{y-2014}n+1+2015^xm=1+2015^{y-2014}m+2015^xm+2015^{x+y-2014}mn, \\
&\therefore 2015^{x+y-2014}mn=1, \\
&\therefore mn=2015^{2015}, \\
&\therefore 2015^{x+y-2014} \times 2015^{2015}=1, \\
&\therefore 2015^{x+y}=\frac{1}{2015}, \\
&\text{故答案为: } \frac{1}{2015}.
\end{aligned}$$

11. 观察下列各式及其展开式

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2; \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4; \\
(a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \dots
\end{aligned}$$

请你猜想 $(2x-1)^{11}$ 的展开式中含 x^2 项的系数是 _____ - 220 _____.

【解答】解： $\because (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$
 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$
 $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$
 $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5,$

依据规律可得到：

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &\text{倒数第三项的系数为 } 1, \\
(a+b)^3 &\text{倒数第三项的系数为 } 3 = 1 + 2, \\
(a+b)^4 &\text{倒数第三项的系数为 } 6 = 1 + 2 + 3, \\
&\dots
\end{aligned}$$

$$\therefore (2x-1)^{11} \text{ 展开式有 } 12 \text{ 项, 其中含有 } x^2 \text{ 的是第 } 10 \text{ 项为: } 1+2+3+\dots+9+10=55,$$

$$\therefore \text{含有 } x^2 \text{ 项的系数为: } 2^2 \times (-1)^9 \times 55 = -220,$$

故答案为：-220.

12. 若规定符号 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的意义是： $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, 则当 $m^2 - 2m - 3 = 0$ 时, $\begin{vmatrix} m^2 & m-3 \\ 1-2m & m-2 \end{vmatrix}$ 的值为 9.

【解答】解：由题意可得，

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} m^2 & m-3 \\ 1-2m & m-2 \end{vmatrix} \\
&= m^2(m-2) - (m-3)(1-2m) \\
&= m^3 - 7m + 3, \\
&\because m^2 - 2m - 3 = 0, \\
&\therefore m^2 = 2m + 3, m^2 - 2m = 3 \\
&\therefore m^3 - 7m + 3 \\
&= m(m^2) - 7m + 3 \\
&= m(2m + 3) - 7m + 3 \\
&= 2m^2 - 4m + 3 \\
&= 2(m^2 - 2m) + 3 \\
&= 2 \times 3 + 3 \\
&= 9,
\end{aligned}$$

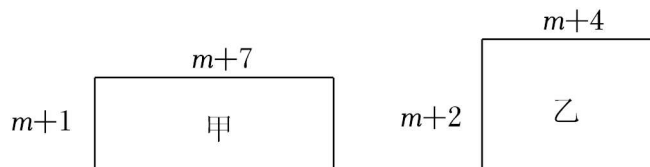
所以当 $m^2 - 2m - 3 = 0$ 时, $\begin{vmatrix} m^2 & m-3 \\ 1-2m & m-2 \end{vmatrix}$ 的值为 9.

故答案为: 9.

13. 已知甲、乙两个长方形, 它们的边长如图 (m 为正整数), 甲、乙的面积分别为 S_1, S_2 .

(1) S_1 与 S_2 的大小关系为: S_1 _____ S_2 ; (用 “>”、“<”、“=” 填空)

(2) 若满足条件 $|S_1 - S_2| < n \leq 2024$ 的整数 n 有且只有 5 个, 则 m 的值为 _____.



【解答】解: (1) $\because S_1 = (m+7)(m+1)$

$$= m^2 + 8m + 7,$$

$$S_2 = (m+4)(m+2)$$

$$= m^2 + 6m + 8,$$

$$\therefore S_1 - S_2$$

$$= (m^2 + 8m + 7) - (m^2 + 6m + 8)$$

$$= m^2 + 8m + 7 - m^2 - 6m - 8$$

$$= 2m - 1,$$

$\because m$ 为正整数,

$$\therefore 2m - 1 > 0,$$

$$\therefore S_1 - S_2 > 0,$$

$$\therefore S_1 > S_2,$$

故答案为: >;

$$(2) |S_1 - S_2|$$

$$= |2m - 1|$$

$$= 2m - 1,$$

$\because 2m - 1 < n \leq 2024$ 的整数 n 有且只有 5 个,

\therefore 这四个整数解为 2024, 2023, 2022, 2021, 2020,

$$\therefore 2019 \leq 2m - 1 < 2020,$$

$$\text{解得: } 1010 \leq m < 1010.5,$$

$\because m$ 为正整数,

$$\therefore m = 1010.$$

故答案为: 1010.

14. 定义: 对任意一个两位数 a , 如果 a 满足个位数字与十位数字互不相同, 且都不为 0, 那么称这个两位数为“互异数”, 将一个“互异数”的个位数字与十位数字对调后得到一个新两位数, 把这个新两位数与原两位数的和与 11 的商记为 $f(a)$, 例如: $a = 12$, 对调个位数字与十位数字得到新两位数 21, 新两位数与原两位数的和为 $21 + 12 = 33$, 和与 11 的商为 $33 \div 11 = 3$, 所以 $f(12) = 3$, 根据以上定义, 如果 m, n 都是“互异数”, 且 $m + n = 100$, 求 $f(m) + f(n) =$ 19.

【解答】解: $\because m, n$ 都是“互异数”, 且 $m + n = 100$,

$$\therefore \text{设 } m = 10x + y, \text{ 则 } n = 10(9 - x) + (10 - y),$$

$$\therefore f(m) + f(n)$$

$$= \frac{10x + y + 10y + x}{11} + \frac{10(10 - y) + (9 - x) + 10(9 - x) + (10 - y)}{11}$$

$$= \frac{10x + y + 10y + x}{11} + \frac{100 - 10y + 9 - x + 90 - 10x + 10 - y}{11}$$

$$= \frac{11x+11y}{11} + \frac{209-11x-11y}{11}$$

$$= x + y + 19 - x - y$$

$$= 19,$$

故答案为: 19.

15. 若关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} x+4y=3m+6 \\ 2x-y=3 \end{cases}$ 的解满足 $x+y=9$, 则 m 的值为 6.

【解答】解: $\begin{cases} x+4y=3m+6 \text{ ①} \\ 2x-y=3 \text{ ②} \end{cases}$,

① + ② 得, $3x + 3y = 3m + 9$,

$\therefore x + y = m + 3$,

$\because x + y = 9$,

$\therefore m + 3 = 9$,

$\therefore m = 6$,

故答案为: 6.

16. 已知关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} ax-by=13 \\ cx-y=4 \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x=-5 \\ y=-14 \end{cases}$, 小强因看错了系数 c , 得到的解为 $\begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$, 则 $(a-b-c)^{2023} = \underline{\quad\quad} - 1 \underline{\quad\quad}$.

【解答】解: 把 $\begin{cases} x=-5 \\ y=-14 \end{cases}$ 代入关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} ax-by=13 \\ cx-y=4 \end{cases}$ 得:

$$\begin{cases} -5a+14b=13 \text{ ①} \\ -5c+14=4 \text{ ②} \end{cases},$$

由②得: $c = 2$,

把 $\begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$ 代入 $ax-by=13$ 得: $5a-b=13$ ③,

① + ③ 得: $b = 2$,

把 $b = 2$ 代入③得: $a = 3$,

$\therefore (a-b-c)^{2023}$

$= (3-2-2)^{2023}$

$= (-1)^{2023}$

$= -1$.

17. 现有 A、B、C、D 四张纸片, 纸片上分别写有一个方程.

A $x+y=7$	B $x-y=1$	C $4x+3y=4$	D $3x-4y=11$
---------------------	---------------------	-----------------------	------------------------

(1) 若取 A、B 纸片, 则联立得到的方程组的解为 $\underline{\quad\quad} \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases} \underline{\quad\quad}$.

(2) 若取两张纸片, 联立得到的方程组的解为 $\begin{cases} x=-7 \\ y=-8 \end{cases}$, 则取的两张纸片为 .

【解答】解: (1) $\begin{cases} x+y=7 \text{ ①} \\ x-y=1 \text{ ②} \end{cases}$,

① + ②, 得 $2x = 8$,

解得 $x = 4$,

① - ②, 得 $2y = 6$,

解得 $y = 3$,

∴ 方程组的解为 $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$;

故答案为: $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$;

(2) 当 $\begin{cases} x=-7 \\ y=-8 \end{cases}$ 时, 方程左边 $= -7 + (-8) = -15$, 方程右边 $= 7$,

∴ 方程左边 \neq 方程右边, 卡片 A 不符合题意;

当 $\begin{cases} x=-7 \\ y=-8 \end{cases}$ 时, 方程左边 $= -7 - (-8) = 1$, 方程右边 $= 1$,

∴ 方程左边 $=$ 方程右边, 卡片 B 符合题意;

当 $\begin{cases} x=-7 \\ y=-8 \end{cases}$ 时, 方程左边 $= 4 \times (-7) + 3 \times (-8) = -52$, 方程右边 $= 4$,

∴ 方程左边 \neq 方程右边, 卡片 C 不符合题意;

当 $\begin{cases} x=-7 \\ y=-8 \end{cases}$ 时, 方程左边 $= 3 \times (-7) - 4 \times (-8) = 11$, 方程右边 $= 11$,

∴ 方程左边 $=$ 方程右边, 卡片 D 符合题意.

∴ 取的两张纸片为 B 和 D.

故答案为: B 和 D.

18. 对于 x , 符号 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数. 如: $[3.14] = 3$, $[-7.59] = -8$, 则满足关系式 $\left[\frac{3x+7}{7}\right] = 4$ 的 x 的整数值有 3 个.

【解答】解: 由题意得 $4 \leq \frac{3x+7}{7} < 5$,

解得: $7 \leq x < \frac{28}{3}$,

其整数解为 7、8、9 共 3 个.

故答案为: 3.

19. 某商家采取线上、线下两种方式销售 A、B、C、D 四种类型的某件商品. 其中线上销售时, A 型销量是 B 型销量的 2 倍, D 型销量是 C 型销量的 $\frac{1}{2}$, C 型售价是 A 型售价的 5 倍, D 型售价是 B 型售价的 4 倍. 线下销售时, A 型销量比线上销售提高 50%, C 型销量比线上降低 $\frac{1}{3}$, D 型售价比线上售价降低一半, 结果销量和 C 型销量保持一致, 其他类型售价和销售量和线上保持一致, 结果 A 型和 C 型线上、线下销售总额比 B 型和 D 型线上、线下销售总额高出 646 元. 若 A 型线上售价的 5 倍与 B 型线上售价的 2 倍之差不低于 20 元但不超过 40 元, A 型线上售价定在 7.5 元到 11.5 元之间, 线上、线下销售量与售价均为整数, 则 A 型线上销售额最多比 B 型线上销售额多 117 元.

【解答】解: 设线上销售时 B 型孔明灯销量为 a , 售价为 b 元, C 型孔明灯销量为 m , 售价为 n 元,

则 A 型孔明灯销售为 $2a$, 售价为 $\frac{n}{5}$ 元, D 型孔明灯销量为 $\frac{m}{2}$, 售价为 $4b$ 元.

线下销售时 A 型孔明灯销量为 $2 \times (1 + 50\%)a = 3a$, 售价为 $\frac{n}{5}$ 元,

C 型孔明灯销量为 $(1 - \frac{1}{3})m = \frac{2}{3}m$, 售价为 n 元,

D 型孔明灯销量为 $\frac{2}{3}m$, 售价为 $\frac{1}{2} \times 4b = 2b$ 元,

B 型孔明灯销量为 a , 售价为 b 元.

由题意得, $2a \cdot \frac{n}{5} + 3a \cdot \frac{n}{5} + mn + \frac{2}{3}mn - (ab + ab + \frac{m}{2} \cdot 4b + \frac{2}{3}m \cdot 2b) = 646$,

化简得 $an + \frac{5}{3}mn - 2ab - \frac{10}{3}mb = 646$,

∴ $(n - 2b)(a + \frac{5}{3}m) = 646$,

由 $20 \leq 5 \times \frac{n}{5} - 2b \leq 40$ 得 $20 \leq n - 2b \leq 40$,

$\because 646 = 38 \times 17 = 34 \times 19$,

$\therefore n - 2b = 34, a + \frac{5}{3}m = 19$ 或 $n - 2b = 38, a + \frac{5}{3}m = 17$;

由 $7.5 < \frac{n}{5} < 11.5$ 得 $37.5 < n < 57.5$,

\therefore 销售量与售价均为整数,

$\therefore \frac{n}{5}, \frac{m}{2}$ 均为整数, $\frac{n}{5}$ 可以为 8、9、10、11,

1° 当 $\frac{n}{5} = 8$, 即 $n = 40$ 时, $20 \leq 40 - 2b \leq 40$, 解得 $0 \leq b \leq 10$,

2° 当 $\frac{n}{5} = 9$, 即 $n = 45$ 时, $20 \leq 45 - 2b \leq 40$, 解得 $\frac{5}{2} \leq b \leq \frac{25}{2}$, 不符合题意, 舍去,

3° 当 $\frac{n}{5} = 10$, 即 $n = 50$ 时, $20 \leq 50 - 2b \leq 40$, 解得 $5 \leq b \leq 15$,

4° 当 $\frac{n}{5} = 11$, 即 $n = 55$ 时, $20 \leq 55 - 2b \leq 40$, 解得 $7.5 \leq b \leq 17.5$, 不符合题意, 舍去,

$\therefore n = 40$ 或 50 ,

当 $n = 40, n - 2b = 34, a + \frac{5}{3}m = 19$ 时, $40 - 2b = 34$, 解得 $b = 3$, 此时 $a + \frac{5}{3}m = 19$,

当 $n = 50, n - 2b = 34, a + \frac{5}{3}m = 19$ 时, $50 - 2b = 34$, 解得 $b = 8$, 此时 $a + \frac{5}{3}m = 19$,

当 $n = 40, n - 2b = 38, a + \frac{5}{3}m = 17$ 时, $40 - 2b = 38$, 解得 $b = 1$, 此时 $a + \frac{5}{3}m = 17$,

当 $n = 50, n - 2b = 38, a + \frac{5}{3}m = 17$ 时, $50 - 2b = 38$, 解得 $b = 6$, 此时 $a + \frac{5}{3}m = 17$,

由 $\frac{m}{2}, \frac{2}{3}m$ 为整数得, m 为 6 的倍数, m 的最小值为 6,

A 型的孔明灯线上销售额比 B 型明灯线上销售额多 $(2a \cdot \frac{n}{5} - ab) = a(\frac{2}{5}n - b)$,

当 $n = 40, b = 3, a + \frac{5}{3}m = 19$ 时, a 的最大值为 9, 此时 $a(\frac{2}{5}n - b) = 9 \times (\frac{2}{5} \times 40 - 3) = 117$,

当 $n = 50, b = 8, a + \frac{5}{3}m = 19$ 时, a 的最大值为 9, 此时 $a(\frac{2}{5}n - b) = 9 \times (\frac{2}{5} \times 40 - 8) = 108$,

当 $n = 40, b = 1, a + \frac{5}{3}m = 17$ 时, a 的最大值为 7, 此时 $a(\frac{2}{5}n - b) = 7 \times (\frac{2}{5} \times 40 - 1) = 105$,

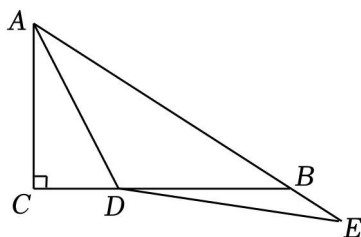
当 $n = 50, b = 6, a + \frac{5}{3}m = 17$ 时, a 的最大值为 7, 此时 $a(\frac{2}{5}n - b) = 7 \times (\frac{2}{5} \times 40 - 6) = 98$,

综上, 当 $a = 9, b = 3, n = 40$ 时, A 型的孔明灯线上销售额比 B 型明灯线上销售额多 $(2a \cdot \frac{n}{5} - ab)$ 元有最大值,

最大值 117(元),

故答案为: 117.

20. 如图 $Rt\triangle ACB$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, AD 平分 $\angle CAB$ 交 BC 于 D , 点 E 在 AB 的延长线上, 满足 $\angle ADE + \angle CAB = 180^\circ$, 若 $AC = 6, BE = 2$, 则线段 AB 的长为 10.



【解答】解: 延长 AD 到 M , 作 $DH \perp AB$ 于 H .

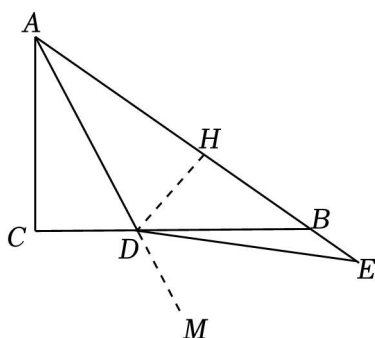
$\because AD$ 平分 $\angle CAB$,

$\therefore \angle DAC = \angle DAH$,

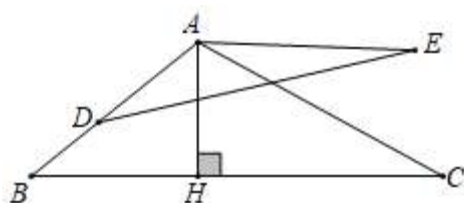
$\because \angle C = \angle AHD, AD = AD$,

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle ADH (AAS)$,

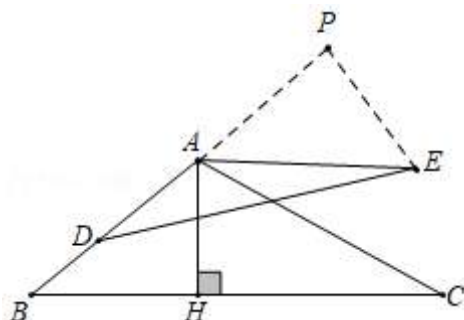
$\therefore AC = AH = 6$,
 $\because \angle ADE + \angle CAB = 180^\circ, \angle ADE + \angle EDM = 180^\circ$,
 $\therefore \angle EDM = \angle CAB$,
 $\because \angle EDM = \angle DAE + \angle DEA = \angle DAE + \angle CAD, \angle CAD = \angle DAB$,
 $\therefore \angle DAB = \angle E$,
 $\therefore DA = DE$,
 $\because DH \perp AE$,
 $\therefore AH = HE = 6$,
 $\because BE = 2$,
 $\therefore BH = 4$,
 $\therefore AB = 10$,
 故答案为: 10.



21. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AH 是高, $AE \parallel BC$, $AB = AE$, 在 AB 边上取点 D , 连接 DE , $DE = AC$, 若 $S_{\triangle ABC} = 5S_{\triangle ADE}$, $BH = 1$, 则 $BC = \frac{5}{2}$.



【解答】解: 过点 E 作 $EP \perp BA$, 交 BA 的延长线于 P ,
 $\therefore \angle P = \angle AHB = 90^\circ$,



$\because AE \parallel BC$,
 $\therefore \angle EAP = \angle CBA$,
 在 $\triangle AEP$ 和 $\triangle BAH$ 中,

$$\begin{cases} \angle P = \angle AHB \\ \angle PAE = \angle B \\ AE = AB \end{cases}$$
 $\therefore \triangle AEP \cong \triangle BAH (AAS)$,
 $\therefore PE = AH$,
 在 $Rt\triangle DEP$ 和 $Rt\triangle CAH$ 中,

$$\begin{cases} DE=AC \\ PE=AH \end{cases},$$

$$\therefore Rt\triangle DEP \cong Rt\triangle CAH(HL),$$

$$\therefore CH=DP, S_{\triangle ACH}=S_{\triangle DPE},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABH}+S_{\triangle AHC}=2S_{\triangle ABH}+S_{\triangle ADE}=5S_{\triangle ADE},$$

$$\therefore S_{\triangle ABH}:S_{\triangle ADE}=2:1,$$

$$\therefore BH:AD=2:1,$$

$$\therefore BH=1,$$

$$\therefore AD=\frac{1}{2},$$

$$\therefore DP=CH=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

$$\therefore BC=BH+CH=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2},$$

$$\text{故答案为: } \frac{5}{2}.$$

$$22. \text{ 已知 } 2^m=a, 32^n=b, m, n \text{ 为正整数, 求 } 2^{3m+10n-2}.$$

$$\text{【解答】解: } \because 2^m=a, 32^n=2^{5n}=b, m, n \text{ 为正整数,}$$

$$\therefore 2^{3m+10n-2}=2^{3m} \times 2^{10n} \div 2^2$$

$$=(2^m)^3 \times (2^{5n})^2 \div 4$$

$$=\frac{1}{4}a^3b^2.$$

$$23. \text{ 已知 } a^x \cdot a^y=a^4, a^x \div a^y=a$$

$$(1) \text{ 求 } x+y \text{ 与 } x-y \text{ 的值.}$$

$$(2) \text{ 求 } x^2+y^2 \text{ 的值.}$$

$$\text{【解答】解: (1) } \because a^x \cdot a^y=a^4, a^x \div a^y=a,$$

$$\therefore x+y=4, x-y=1;$$

$$(2) \begin{cases} x+y=4 \\ x-y=1 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x=2.5 \\ y=1.5 \end{cases},$$

$$x^2+y^2=8.5.$$

24. 阅读材料:利用公式法,可以将一些形如 $ax^2+bx+c(a \neq 0)$ 的多项式变形为 $a(x+m)^2+n$ 的形式,我们把这样的变形方法叫做多项式 $ax^2+bx+c(a \neq 0)$ 的配方法,运用多项式的配方法及平方差公式能对一些多项式进行因式分解,例如: $x^2+4x-5=x^2+4x+(\frac{4}{2})^2-(\frac{4}{2})^2-5=(x+2)^2-9=(x+2+3)(x+2-3)=(x+5)(x-1)$.

$$\because (x+2)^2 \geq 0, \therefore \text{当 } (x+2)^2=0 \text{ 时,原式有最小值,最小值为 } -9.$$

根据以上材料,解答下列问题:

$$(1) \text{ 利用配方法分解因式: } x^2+2x-8;$$

$$(2) \text{ 求多项式 } x^2+4x-2020 \text{ 的最小值;}$$

$$(3) \text{ 已知 } a, b, c \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 的三边长,且满足 } a^2+b^2+c^2+50=6a+8b+10c, \text{ 求 } \triangle ABC \text{ 的周长.}$$

$$\text{【解答】解: (1) 原式} = x^2+2x+1-9$$

$$=(x+1)^2-3^2$$

$$=(x+1+3)(x+1-3)$$

$$=(x+4)(x-2);$$

$$(2) x^2+4x-2020$$

$$=x^2+4x+2^2-2^2-2020$$

$$= (x+2)^2 - 2024,$$

$$\therefore (x+2)^2 \geq 0,$$

$$\therefore (x+2)^2 - 2024 \geq -2024,$$

\therefore 多项式 $x^2 + 4x - 2020$ 的最小值为 -2024 .

$$(3) \because a^2 + b^2 + c^2 + 50 = 6a + 8b + 10c,$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 + 50 - 6a - 8b - 10c = 0,$$

$$\therefore a^2 - 6a + 9 + b^2 - 8a + 16 + c^2 - 10c + 25 = 0,$$

$$\therefore (a-3)^2 + (b-4)^2 + (c-5)^2 = 0,$$

$$\therefore a-3=0, b-4=0, c-5=0,$$

$$\therefore a=3, b=4, c=5,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的周长} = 3 + 4 + 5 = 12.$$

25. 我们已经知道,通过计算几何图形的面积可以表示一些代数恒等式. 例如图1可以得到 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, 基于此,请解答下列问题:

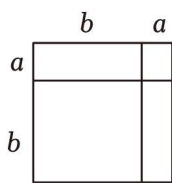


图 1

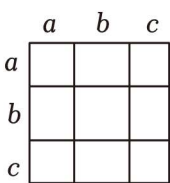


图 2

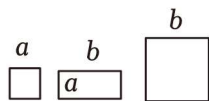


图 3

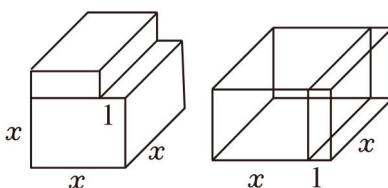


图 4

(1) 根据图2, 写出一个代数恒等式: $(a+b+c)^2 = \underline{\hspace{2cm}} a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 利用(1)中得到的结论, 解决下面的问题: 若 $a+b+c=10$, $ab+ac+bc=20$, 则 $a^2+b^2+c^2 = \underline{\hspace{2cm}}$;

(3) 小明同学用图3中2张边长为 a 的正方形, 3张边长为 b 的正方形, m 张边长分别为 a 、 b 的长方形纸片拼出一个长方形, 直接写出 m 的所有可能取值 $\underline{\hspace{2cm}}$;

(4) 事实上, 通过计算几何图形的体积也可以表示一些代数恒等式, 图4表示的是一个棱长为 x 的正方体挖去一个小长方体后重新拼成一个新长方体, 请你根据图4中图形的变化关系, 写出一个代数恒等式: $\underline{\hspace{2cm}}$.

【解答】解: (1) \because 边长为 $(a+b+c)$ 的正方形的面积为: $(a+b+c)^2$

分部分来看的面积为 $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

两部分面积相等.

$$\therefore (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac,$$

故答案为: $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$;

$$(2) \because (a+b+c)^2$$

$$= (a+b+c)(a+b+c)$$

$$= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac),$$

$$\because a+b+c=10, ab+ac+bc=20,$$

$$\therefore 10^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \times 20,$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 100 - 40 = 60,$$

故答案为: 60;

(3) 由题意可得, 所拼成的长方形或正方形的面积为:

$$2a^2 + 3b^2 + mab$$

从因式分解的角度看, 可分解为 $(2a+b)(a+3b)$ 或 $(2a+3b)(a+b)$

$$\therefore (2a+b)(a+3b) = 2a^2 + 3b^2 + 7ab \text{ 或 } (2a+3b)(a+b) = 2a^2 + 3b^2 + 5ab$$

$$\therefore m = 5 \text{ 或 } 7.$$

故答案为: 5 或 7;

(4) \because 原几何体的体积 $= x^3 - 1 \times 1 \cdot x = x^3 - x$, 新几何体的体积 $= (x+1)(x-1)x$,

$$\therefore x^3 - x = (x+1)(x-1)x.$$

故答案为: $x^3 - x = x(x+1)(x-1)$.

26. 综合应用

在学习《完全平方公式》时, 某兴趣小组发现: 已知 $a+b=5$, $ab=3$, 可以在不求 a 、 b 的值的情况下, 求出 a^2+b^2 的值. 具体做法如下:

$$a^2+b^2 = a^2+b^2+2ab-2ab = (a+b)^2-2ab = 5^2-2 \times 3 = 19.$$

(1) 若 $a+b=7$, $ab=6$, 则 $a^2+b^2 = \underline{37}$;

(2) 若 m 满足 $m(8-m)=3$, 求 $m^2+(8-m)^2$ 的值, 同样可以应用上述方法解决问题. 具体操作如下:

解: 设 $m=a$, $8-m=b$,

$$\text{则 } a+b=m+(8-m)=8, ab=m(8-m)=3,$$

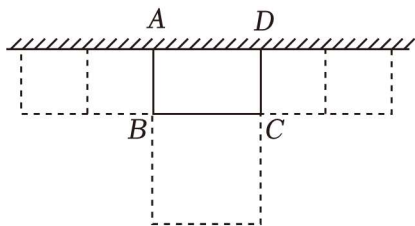
$$\text{所以 } m^2+(8-m)^2 = a^2+b^2 = (a+b)^2-2ab = 8^2-2 \times 3 = 58.$$

请参照上述方法解决下列问题:

① 若 $-3x(3x+5)=6$, 求 $9x^2+(3x+2)^2$ 的值;

② 若 $(2x-1)(5-2x)=3$, 求 $(2x-1)^2+(5-2x)^2$ 的值;

(3) 如图, 某校园艺社团在三面靠墙的空地上, 用长 11 米的篱笆 (不含墙 AD) 围成一个长方形的花圃 $ABCD$, 面积为 15 平方米, 其中墙 AD 足够长, 墙 $AB \perp$ 墙 AD , 墙 $DC \perp$ 墙 AD . 随着学校社团成员的增加, 学校在花圃 $ABCD$ 旁分别以 AB , CD 边向外各扩建两个正方形花圃, 以 BC 边向外扩建一个正方形花圃 (扩建部分如图所示虚线区域部分), 求花圃扩建后增加的面积.



【解答】解: (1) $\because a+b=7$, $ab=6$,

$$\therefore a^2+b^2 = (a+b)^2-2ab = 7^2-2 \times 6 = 37,$$

故答案为: 37;

(2) ① 设 $-3x=a$, $3x+5=b$,

$$\therefore -3x(3x+5) = ab = 6, a+b=5,$$

$$\therefore 9x^2+(3x+2)^2$$

$$= a^2+b^2$$

$$= (a+b)^2-2ab$$

$$= 5^2-2 \times 6$$

$$= 13;$$

② 设 $2x-1=a$, $5-2x=b$,

$$\therefore (2x-1)(5-2x) = ab = 3, a+b=4,$$

$$\therefore (2x-1)^2+(5-2x)^2$$

$$= a^2+b^2$$

$$= (a+b)^2-2ab$$

$$= 4^2-2 \times 3$$

$$= 10;$$

(3) 设 $AB=x$ 米, $BC=y$ 米,

由题意可得: $2x+y=11$ (米), $xy=15$ (米),

由图可知, 扩建部分的面积为: $(4x^2+y^2)$ 米,

\therefore 扩建部分的面积为:

$$\begin{aligned}
& (4x^2 + y^2) \\
& = (2x + y)^2 - 4xy \\
& = 11^2 - 4 \times 15 \\
& = 121 - 60 \\
& = 61(\text{米}),
\end{aligned}$$

答:花圃扩建后增加的面积为61米.

27. 在实数范围内分解因式:

(1) $6q(2p + 3q) + 4p(3q + 2p)$;

(2) $(x^2 + x)^2 - (x + 1)^2$;

(3) $16x^8 - 8x^4 + 1$.

【解答】解: (1) $6q(2p + 3q) + 4p(3q + 2p) = 2(2p + 3q)(2p + 3q) = 2(2p + 3q)^2$;

(2) $(x^2 + x)^2 - (x + 1)^2 = (x^2 + x + x + 1)(x^2 + x - x - 1) = (x + 1)^2(x + 1)(x - 1) = (x + 1)^3(x - 1)$;

(3) $16x^8 - 8x^4 + 1 = (4x^4 - 1)^2 = (2x^2 + 1)^2(2x^2 - 1)^2 = (2x^2 + 1)^2(\sqrt{2}x + 1)^2(\sqrt{2}x - 1)^2$.

28. 在实数范围内分解因式: $x^3 - x^2 - 2x + 2$.

【解答】解: $x^3 - x^2 - 2x + 2$,
 $= x^2(x - 1) - 2(x - 1)$,
 $= (x - 1)(x^2 - 2)$,
 $= (x - 1)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$.

29. 若一个不等式(组) A 有解且解集为 $a < x < b(a < b)$,则称 $\frac{a+b}{2}$ 为 A 的解集中点值,若 A 的解集中点值是不等式(组) B 的解(即中点值满足不等式组),则称不等式(组) B 对于不等式(组) A 中点包含.

(1) 已知关于 x 的不等式组 $A: \begin{cases} 2x - 3 > 5 \\ 6 - x > 0 \end{cases}$,以及不等式 $B: -1 < x \leq 5$,请判断不等式 B 对于不等式组 A 是否中点包含,并写出判断过程;

(2) 已知关于 x 的不等式组 $C: \begin{cases} 2x + 7 > 2m + 1 \\ 3x - 16 < 9m - 1 \end{cases}$ 和不等式组 $D: \begin{cases} x > m - 4 \\ 3x - 13 < 5m \end{cases}$,若 D 对于不等式组 C 中点包含,求 m 的取值范围.

(3) 关于 x 的不等式组 $E: \begin{cases} x > 2n \\ x < 2m \end{cases} (n < m)$ 和不等式组 $F: \begin{cases} x - n < 6 \\ 2x - m > 3n \end{cases}$,若不等式组 F 对于不等式组 E 中点包含,且所有符合要求的整数 m 之和为14,求 n 的取值范围.

【解答】解: (1) 不等式 B 对于不等式组 A 中点包含,判断过程如下:

解不等式组 $A: \begin{cases} 2x - 3 > 5 \\ 6 - x > 0 \end{cases}$,得 $4 < x < 6$,

$\therefore A$ 的中点值为 $x = 5$,

$\because x = 5$ 在 $-1 < x \leq 5$ 范围内,

\therefore 不等式 B 对于不等式组 A 中点包含;

(2) $\because D$ 对于不等式组 C 中点包含,

\therefore 不等式组 C 和不等式组 D 有解,

解不等式组 $C: \begin{cases} 2x + 7 > 2m + 1 \\ 3x - 16 < 9m - 1 \end{cases}$,得 $\begin{cases} x > m - 3 \\ x < 3m + 5 \end{cases}$,

不等式组 $D: \begin{cases} x > m - 4 \\ 3x - 13 < 5m \end{cases}$,得 $\begin{cases} x > m - 4 \\ x < \frac{5m + 13}{3} \end{cases}$,

$\therefore \begin{cases} m - 3 < 3m + 5 \\ m - 4 < \frac{5m + 13}{3} \end{cases}$,

解得: $m > -4$,

\therefore 当 $m > -4$ 时, 不等式组 C 的解集为 $m-3 < x < 3m+5$, 不等式组 D 的解集为 $m-4 < x < \frac{5m+13}{3}$,

$\therefore C$ 的中点值为 $\frac{m-3+3m+5}{2} = 2m+1$,

$\therefore D$ 对于不等式组 C 中点包含,

$\therefore m-4 < 2m+1 < \frac{5m+13}{3}$,

解得: $-5 < m < 10$,

又 $\therefore m > -4$,

$\therefore -4 < m < 10$.

(3) 解不等式组 E 得, $2n < x < 2m$, 解不等式组 F 得, $\frac{3n+m}{2} < x < 6+n$,

$\therefore E$ 的中点值为 $n+m$,

\therefore 不等式组 F 对于不等式组 E 中点包含,

$\therefore \frac{3n+m}{2} < n+m < 6+n$,

解得: $n < m < 6$,

\therefore 所有符合要求的整数 m 之和为 14,

\therefore 整数 m 可取 2、3、4、5, 或整数 m 可取 -1、0、1、2、3、4、5.

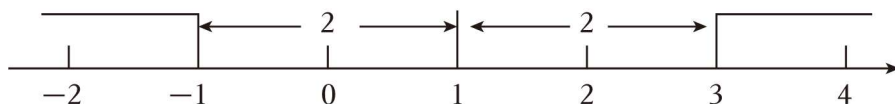
$\therefore 1 \leq n < 2$ 或 $-2 \leq n < -1$.

30. 阅读下列材料:

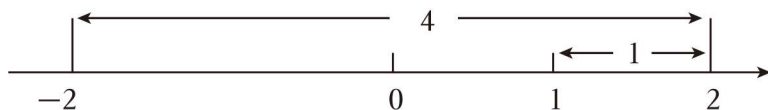
我们知道 $|x|$ 的几何意义是在数轴上数 x 对应的点与原点的距离, 即 $|x| = |x-0|$, 也就是说, x 表示在数轴上数 x 与数 0 对应的点之间的距离; 这个结论可以推广为 $|x_1 - x_2|$ 表示在数轴上数 x_1 与数 x_2 对应的点之间的距离;

例 1. 解方程 $|x| = 2$. 因为在数轴上到原点的距离为 2 的点对应的数为 ± 2 , 所以方程 $|x| = 2$ 的解为 $x = \pm 2$.

例 2. 解不等式 $|x-1| > 2$. 在数轴上找出 $|x-1| = 2$ 的解 (如图), 因为在数轴上到 1 对应的点的距离等于 2 的点对应的数为 -1 或 3, 所以方程 $|x-1| = 2$ 的解为 $x = -1$ 或 $x = 3$, 因此不等式 $|x-1| > 2$ 的解集为 $x < -1$ 或 $x > 3$.



例 3. 解方程 $|x-1| + |x+2| = 5$. 由绝对值的几何意义知, 该方程就是求在数轴上到 1 和 -2 对应的点的距离之和等于 5 的点对应的 x 的值. 因为在数轴上 1 和 -2 对应的点的距离为 3 (如图), 满足方程的 x 对应的点在 1 的右边或 -2 的左边. 若 x 对应的点在 1 的右边, 可得 $x = 2$; 若 x 对应的点在 -2 的左边, 可得 $x = -3$, 因此方程 $|x-1| + |x+2| = 5$ 的解是 $x = 2$ 或 $x = -3$.



参考阅读材料, 解答下列问题:

(1) 方程 $|x+3| = 4$ 的解为 $x = 1$ 或 $x = -7$;

(2) 解不等式: $|x-3| \leq 5$;

(3) 解不等式: $|x-3| + |x+4| \geq 9$.

【解答】解: (1) \therefore 在数轴上到 -3 对应的点的距离等于 4 的点对应的数为 1 或 -7,

\therefore 方程 $|x+3| = 4$ 的解为 $x = 1$ 或 $x = -7$.

(2) 在数轴上找出 $|x-3| = 5$ 的解.

\therefore 在数轴上到 3 对应的点的距离等于 5 的点对应的数为 -2 或 8,

\therefore 方程 $|x-3| = 5$ 的解为 $x = -2$ 或 $x = 8$,

\therefore 不等式 $|x-3| \leq 5$ 的解集为 $-2 \leq x \leq 8$.

(3) 在数轴上找出 $|x-3| + |x+4| = 9$ 的解.

由绝对值的几何意义知, 该方程就是求在数轴上到 3 和 -4 对应的点的距离之和等于 9 的点对应的 x 的值.

∵ 在数轴上 3 和 -4 对应的点的距离为 7,

∴ 满足方程的 x 对应的点在 3 的右边或 -4 的左边.

若 x 对应的点在 3 的右边, 可得 $x=4$; 若 x 对应的点在 -4 的左边, 可得 $x=-5$,

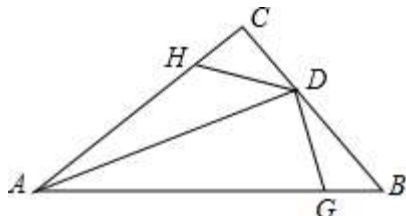
∴ 方程 $|x-3|+|x+4|=9$ 的解是 $x=4$ 或 $x=-5$,

∴ 不等式 $|x-3|+|x+4|\geq 9$ 的解集为 $x\geq 4$ 或 $x\leq -5$.

31. 如图, AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, H, G 分别在 AC, AB 上, 且 $HD=BD$.

(1) 求证: $\angle B$ 与 $\angle AHD$ 互补;

(2) 若 $\angle B+2\angle DGA=180^\circ$, 请探究线段 AG 与线段 AH, HD 之间满足的等量关系, 并加以证明.



【解答】证明: (1) 在 AB 上取一点 M , 使得 $AM=AH$, 连接 DM ,

$$\because \begin{cases} AH=AM \\ \angle CAD=\angle BAD, \\ AD=AD \end{cases}$$

∴ $\triangle AHD \cong \triangle AMD (SAS)$,

∴ $HD=MD$, $\angle AHD=\angle AMD$,

∵ $HD=BD$,

∴ $DB=MD$,

∴ $\angle DMB=\angle B$,

∴ $\angle AMD+\angle DMB=180^\circ$,

∴ $\angle AHD+\angle B=180^\circ$,

即 $\angle B$ 与 $\angle AHD$ 互补.

(2) 由 (1) $\angle AHD=\angle AMD$, $HD=MD$, $\angle AHD+\angle B=180^\circ$,

∴ $\angle B+2\angle DGA=180^\circ$, $\angle AHD=2\angle DGA$,

∴ $\angle AMD=2\angle DGM$,

又 ∵ $\angle AMD=\angle DGM+\angle GDM$,

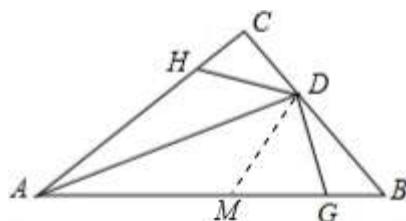
∴ $2\angle DGM=\angle DGM+\angle GDM$, 即 $\angle DGM=\angle GDM$,

∴ $MD=MG$,

∴ $HD=MG$,

∴ $AG=AM+MG$,

∴ $AG=AH+HD$.

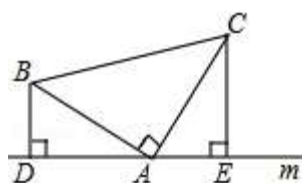


32. (1) 如图①, 已知: $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=90^\circ$, $AB=AC$, 直线 m 经过点 A , $BD \perp m$ 于 D , $CE \perp m$ 于 E , 求证:
 $DE=BD+CE$;

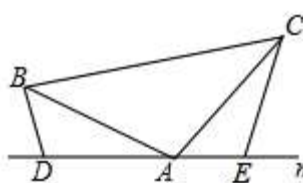
(2) 拓展: 如图②, 将 (1) 中的条件改为: $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, D, A, E 三点都在直线 m 上, 并且 $\angle BDA=\angle AEC=\angle BAC=\alpha$, α 为任意锐角或钝角, 请问结论 $DE=BD+CE$ 是否成立? 如成立, 请证明; 若不成立, 请说明理由;

(3) 应用: 如图③, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC$ 是钝角, $AB=AC$, $\angle BAD > \angle CAE$, $\angle BDA=\angle AEC=\angle BAC$, 直线 m

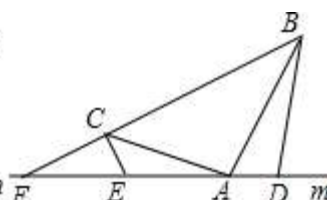
与 BC 的延长线交于点 F , 若 $BC = 2CF$, $\triangle ABC$ 的面积是 12, 求 $\triangle ABD$ 与 $\triangle CEF$ 的面积之和.



图①



图②



图③

【解答】(1) 证明: $\because BD \perp$ 直线 m , $CE \perp$ 直线 m ,

$$\therefore \angle BDA = \angle CEA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle CAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle ABD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle ABD,$$

$$\text{在 } \triangle ADB \text{ 和 } \triangle CEA \text{ 中, } \begin{cases} \angle ABD = \angle CAE \\ \angle BDA = \angle CEA, \\ AB = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADB \cong \triangle CEA (\text{AAS}),$$

$$\therefore AE = BD, AD = CE,$$

$$\therefore DE = AE + AD = BD + CE;$$

(2) 解: 结论 $DE = BD + CE$ 成立; 理由如下:

$$\therefore \angle BDA = \angle BAC = \alpha,$$

$$\therefore \angle DBA + \angle BAD = \angle BAD + \angle CAE = 180^\circ - \alpha,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle ABD,$$

$$\text{在 } \triangle ADB \text{ 和 } \triangle CEA \text{ 中, } \begin{cases} \angle ABD = \angle CAE \\ \angle BDA = \angle CEA, \\ AB = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADB \cong \triangle CEA (\text{AAS}),$$

$$\therefore AE = BD, AD = CE,$$

$$\therefore DE = AE + AD = BD + CE;$$

(3) 解: $\because \angle BAD > \angle CAE$, $\angle BDA = \angle AEC = \angle BAC$,

$$\therefore \angle CAE = \angle ABD,$$

$$\text{在 } \triangle ABD \text{ 和 } \triangle CEA \text{ 中, } \begin{cases} \angle ABD = \angle CAE \\ \angle BDA = \angle CEA, \\ AB = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CEA (\text{AAS}),$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle CEA},$$

设 $\triangle ABC$ 的底边 BC 上的高为 h , 则 $\triangle ACF$ 的底边 CF 上的高为 h ,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot h = 12, S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} CF \cdot h,$$

$$\therefore BC = 2CF,$$

$$\therefore S_{\triangle ACF} = 6,$$

$$\therefore S_{\triangle ACF} = S_{\triangle CEF} + S_{\triangle CEA} = S_{\triangle CEF} + S_{\triangle ABD} = 6,$$

$$\therefore \triangle ABD \text{ 与 } \triangle CEF \text{ 的面积之和为 } 6.$$

33. 综合与实践: 数学模型可以用来解决一类问题, 是数学应用基本途径. 通过探究图形的变化规律, 再结合其他数学知识的内在联系, 最终可以获得宝贵的数学经验, 并将其运用到更广阔的数学天地.

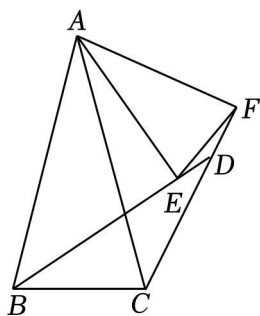


图1

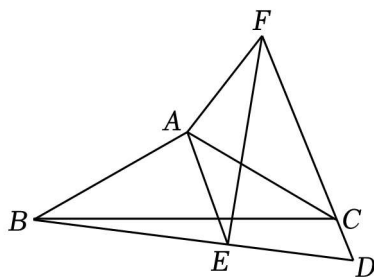


图2

(1) 发现问题:如图1,在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AEF$ 中, $AB=AC$, $AE=AF$, $\angle BAC=\angle EAF=30^\circ$,连接 BE , CF ,延长 BE 交 CF 于点 D . 则 BE 与 CF 的数量关系: $BE=CF$, $\angle BDC=30^\circ$;

(2) 类比探究:如图2,在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AEF$ 中, $AB=AC$, $AE=AF$, $\angle BAC=\angle EAF=120^\circ$,连接 BE , CF ,延长 BE , FC 交于点 D . 请猜想 BE 与 CF 的数量关系及 $\angle BDC$ 的度数,并说明理由.

【解答】解: (1) $BE=CF$, $\angle BDC=30^\circ$,

理由如下:如图1所示,设 AC 与 BD 交于点 O ,

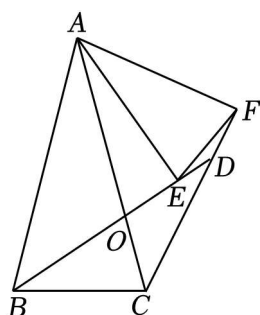


图1

$$\because \angle BAC = \angle EAF = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle CAE = \angle EAF + \angle CAE,$$

$$\text{即 } \angle BAE = \angle CAF,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACF$ 中,

$$\begin{cases} AB=AC \\ \angle BAE=\angle CAF, \\ AE=AF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACF (SAS),$$

$$\therefore BE=CF, \angle ABE = \angle ACF,$$

$$\because \angle AOE = \angle ABE + \angle BAC,$$

$$\angle AOE = \angle ACF + \angle BDC,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle BAC = 30^\circ.$$

故答案为: $BE=CF$, 30° ;

$$(2) BE=CF, \angle BDC=60^\circ,$$

理由如下: $\because \angle BAC = \angle EAF = 120^\circ$,

$$\therefore \angle BAC - \angle EAC = \angle EAF - \angle EAC,$$

$$\text{即 } \angle BAE = \angle CAF,$$

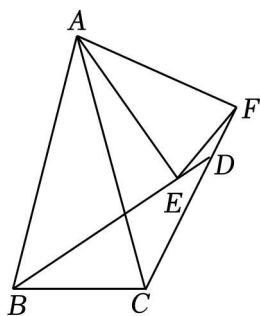


图1

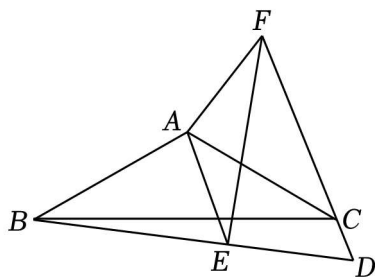


图2

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACF$ 中,

$$\begin{cases} AB=AC \\ \angle BAE=\angle CAF, \\ AE=AF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACF (SAS),$

$\therefore BE=CF, \angle AEB=\angle AFC,$

$\because \angle EAF=120^\circ, AE=AF,$

$\therefore \angle AEF=\angle AFE=30^\circ,$

$\therefore \angle BDC=\angle BEF-\angle EFD=\angle AEB+30^\circ-(\angle AFC-30^\circ)=60^\circ.$

声明:试题解析著作权属菁优网所有,未经书面同意,不得复制发布日期:2024/6/15 11:49:17;用户:林锐;邮箱:
orFmNt6tQsURwEStKmXMGOI-se2Y@weixin.jyeoo.com;学号:24107513