

## 2024 秋季初三数学每日一题打卡 009

009 试题来源:2023 秋季南京建邺区校级月考

在平面直角坐标系中,抛物线  $y = -x^2 + 2mx - m^2 + m (x \geq 0)$  的顶点为  $A$ ,与  $y$  轴相交于点  $B$ .

(1) 点  $A$  的坐标为 \_\_\_\_\_,点  $B$  的坐标为 \_\_\_\_\_ (用含  $m$  的式子表示);

(2) 设抛物线  $y = -x^2 + 2mx - m^2 + m (x \geq 0)$  的函数图象最高点的纵坐标为  $n$ :

① 当  $m = 1$  时,  $n =$  \_\_\_\_\_; 当  $m = -1$  时,  $n =$  \_\_\_\_\_;

② 写出  $n$  关于  $m$  的函数解析式及自变量  $m$  的取值范围;

(3) 将抛物线  $y = -x^2 + 2mx - m^2 + m (x \geq 0)$  的函数图象记为图象  $G$ ,将抛物线  $y = x^2 - 2mx - m^2 + m (x < 0)$  的函数图象记为图象  $H$ ,图象  $H$  和图象  $G$  组合成的图象记为图象  $K$ ,点  $P$  在  $y$  轴上且纵坐标为  $2m - 2$ ,过点  $P$  作直线  $l \perp y$  轴于点  $P$ . 请直接写出直线  $l$  与图象  $K$  有三个交点时  $m$  的取值范围.

**试题解析:**

在平面直角坐标系中, 抛物线  $y = -x^2 + 2mx - m^2 + m (x \geq 0)$  的顶点为  $A$ , 与  $y$  轴相交于点  $B$ .

(1) 点  $A$  的坐标为  $(m, m)$ , 点  $B$  的坐标为  $(0, -m^2 + m)$  (用含  $m$  的式子表示);

$$(1) \because y = -x^2 + 2mx - m^2 + m = -(x-m)^2 + m, \therefore A(m, m),$$

$$\text{令 } x=0, \text{ 则 } y = -x^2 + 2mx - m^2 + m = -m^2 + m, \therefore B(0, -m^2 + m).$$

(2) 设抛物线  $y = -x^2 + 2mx - m^2 + m (x \geq 0)$  的函数图象最高点的纵坐标为  $n$ :

① 当  $m=1$  时,  $n=1$ ; 当  $m=-1$  时,  $n=-2$ ;

② 写出  $n$  关于  $m$  的函数解析式及自变量  $m$  的取值范围;

$$(2) \because y = -x^2 + 2mx - m^2 + m = -(x-m)^2 + m (x \geq 0),$$

① 当  $m=1$  时, 则函数的最高点为  $(1, 1)$ , 当  $m=-1$  时, 则函数的最高点为  $(0, -m^2 + m)$ ,

$\therefore$  当  $m=1$  时,  $n=1$ ; 当  $m=-1$  时,  $n=-2$ .

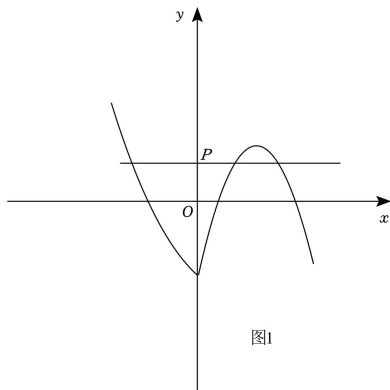
② 当  $m \geq 0$  时,  $n=m$ ; 当  $m < 0$  时,  $n=-m^2 + m$ ;

(3) 将抛物线  $y = -x^2 + 2mx - m^2 + m (x \geq 0)$  的函数图象记为图象  $G$ , 将抛物线  $y = x^2 - 2mx - m^2 + m (x < 0)$  的函数图象记为图象  $H$ , 图象  $H$  和图象  $G$  组合成的图象记为图象  $K$ , 点  $P$  在  $y$  轴上且纵坐标为  $2m-2$ , 过点  $P$  作直线  $l \perp y$  轴于点  $P$ . 请直接写出直线  $l$  与图象  $K$  有三个交点时  $m$  的取值范围.

(3) 分  $m \geq 0$ ,  $m < 0$  两种情况讨论, 化成函数  $k$  的图象, 根据图象求得满足题意的  $m$  的取值即可.

**【解答】解:** (3)

当  $m > 0$  时, 如图 1,



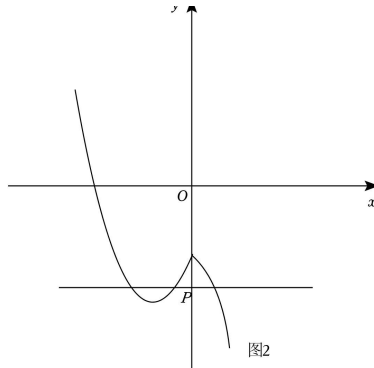
当  $2m-2=m$  时, 解得  $m=2$ ;

当  $2m-2=-m^2+m$  时,

解得  $m=1$  或  $m=-2$  (舍去);

$\therefore$  当  $m > 0$  时, 直线  $l$  与图象  $K$  有三个交点时  $m$  的取值范围是  $1 < m < 2$ ;

当  $m < 0$  时, 如图 2,



由  $y = x^2 - 2mx - m^2 + m = (x-m)^2 - 2m^2 + m$ ,

$\therefore$  抛物线  $y = x^2 - 2mx - m^2 + m (x < 0)$  的最低点为  $(m, -2m^2 + m)$ ,

当  $2m-2=-2m^2+m$  时,

$$\text{解得 } m = \frac{-1-\sqrt{17}}{4} \text{ 或 } m = \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \text{ (舍去);}$$

当  $2m-2=-m^2+m$  时,

解得  $m=-2$  或  $m=1$  (舍去);

$\therefore$  当  $m < 0$  时, 直线  $l$  与图象  $K$  有三个交点时  $m$  的取值范围是  $-2 < m < \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$ ;

综上, 直线  $l$  与图象  $K$  有三个交点时  $m$  的取值范围是  $-2 < m < \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$  或  $1 < m < 2$ .