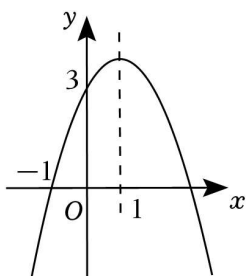


2024 秋季初三上数学期中每日一练 001

1. 如图是二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  的图象, 则不等式  $ax^2 + bx + c < 3$  的解集是 ( )

- A.  $x < 0$                       B.  $x < -1$  或  $x > 3$                       C.  $0 < x < 2$                       D.  $x < 0$  或  $x > 2$



第1题图

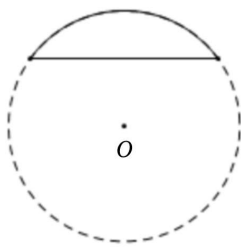


图1

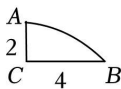
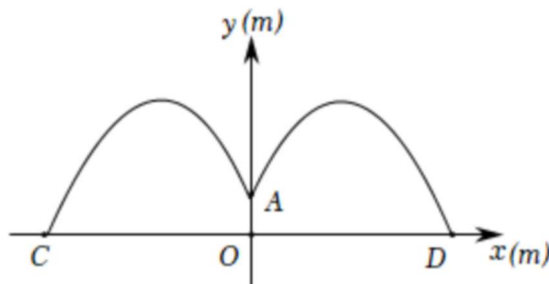


图2



第 6 题图

2. 小淇从  $\odot O$  中剪下一个图形 (图 1). 对折后 (图 2), 若  $AC=2$ ,  $BC=4$ , 则  $\odot O$  半径为 \_\_\_\_\_.

3. 已知二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c$  是常数, 且  $a \neq 0$ ), 函数值  $y$  与自变量  $x$  的部分对应值如下表:

$x$	$\cdots$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$	$4$	$\cdots$
$y$	$\cdots$	$10$	$y_1$	$2$	$1$	$2$	$5$	$\cdots$

当  $y < y_1$  时, 自变量  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

4. 已知关于  $x$  的二次函数  $y = mx^2 - 2x + 1$ , 当  $x < \frac{1}{5}$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小, 则  $m$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

5. 把二次函数  $y = x^2 - 2x + 3$  的图象绕原点旋转  $180^\circ$  后得到的图象的函数解析式为\_\_\_\_\_.

6. 某游乐场的圆形喷水池中心  $O$  有一雕塑  $OA$ , 从  $A$  点向四周喷水, 喷出的水柱为抛物线, 且形状相同. 如图, 以水平方向为  $x$  轴, 点  $O$  为原点建立直角坐标系, 点  $A$  在  $y$  轴上,  $x$  轴上的点  $C, D$  为水柱的落水点, 水柱所在抛物线第一象限部分的函数表达式为  $y = -\frac{1}{6}(x-5)^2 + 6$ , 则  $CD$  的长为       $m$ .

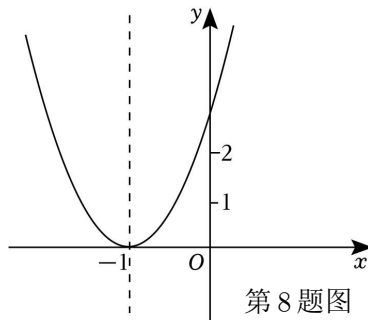
7. 在平面直角坐标系中,函数  $y = x^2 - 2x - 3$  的图象与  $x$  轴交于点  $A, B$ ,将函数  $y = x^2 - 2x - 3$  的图象向上平移,平移后的图象与  $x$  轴交于点  $C, D$ . 若  $AB = 2CD$ ,则平移后的图象对应的函数表达式为\_\_\_\_\_.

8. 已知二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  的图象如图所示, 顶点为  $(-1, 0)$ , 则下列结论:

- ①  $abc < 0$ ;
- ②  $b^2 - 4ac = 0$ ;
- ③  $2a - b = 0$ ;
- ④  $a > 2$ ;
- ⑤  $4a - 2b + c < 0$ .

其中正确结论的个数是( )

- A. 2个                  B. 3个  
C. 4个                  D. 5个



第 8 题图

9. 抛物线  $y = ax^2 + bx + 2$  经过点  $A(m-1, n)$ 、 $B(-m-1, n)$ 、 $C(1, p)$ , 且  $p < 2$ , 则该抛物线的顶点在 ( )

- A. 第一象限                  B. 第二象限                  C. 第三象限                  D. 第四象限



1. 如图是二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  的图象, 则不等式  $ax^2 + bx + c < 3$  的解集是 ( )

A.  $x < 0$

B.  $x < -1$  或  $x > 3$

C.  $0 < x < 2$

D.  $x < 0$  或  $x > 2$

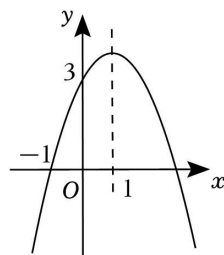
【解答】解: 由抛物线和  $y$  轴的交点为  $(0, 3)$ , 对称轴为直线  $x = 1$ ,

故当  $x = 0$  或  $x = 2$  时,  $y = 3$ ,

故不等式  $ax^2 + bx + c < 3$  的解集为:

$x < 0$  或  $x > 2$ .

故选: D.



2. 小淇从  $\odot O$  中剪下一个图形 (图1). 对折后 (图2), 若  $AC = 2$ ,  $BC = 4$ , 则  $\odot O$  半径为 5.

【解答】解: 如图: 连接  $OB$ ,

由折叠得:  $\angle OCB = 90^\circ$ ,

设  $\odot O$  半径为  $r$ ,

$\because AC = 2$ ,

$\therefore OC = OA - AC = r - 2$ ,

在  $Rt\triangle OBC$  中,  $BC = 4$ ,

$\therefore BC^2 + OC^2 = OB^2$ ,

$\therefore 4^2 + (r - 2)^2 = r^2$ ,

解得:  $r = 5$ ,

$\therefore \odot O$  半径为 5, 故答案为: 5.

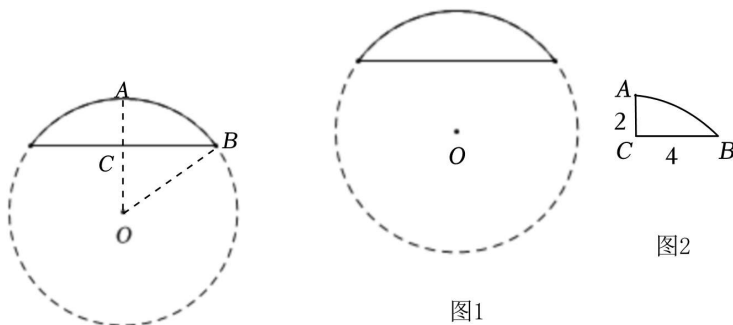


图1

图2

3. 已知二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c$  是常数, 且  $a \neq 0$ ), 函数值  $y$  与自变量  $x$  的部分对应值如下表:

$x$	$\cdots$	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
$y$	$\cdots$	10	$y_1$	2	1	2	5	$\cdots$

当  $y < y_1$  时, 自变量  $x$  的取值范围是  $0 < x < 4$ .

【解答】解: 由题意得, 抛物线的顶点坐标为  $(2, 1)$ , 对称轴是直线  $x = 2$ , 开口向上,

$\therefore$  当  $x = 0$  时的函数值与  $x = 4$  时的函数值相等,

$\therefore$  当  $y < y_1$  时, 自变量  $x$  的取值范围是  $0 < x < 4$ ,

故答案为:  $0 < x < 4$ .

4. 已知关于  $x$  的二次函数  $y = mx^2 - 2x + 1$ , 当  $x < \frac{1}{5}$  时,  $y$  的值随  $x$  的增大而减小, 则  $m$  的取值范围为  $0 < m \leq 5$ .

【解答】解: 由当  $x < \frac{1}{5}$  时,  $y$  的值随  $x$  的增大而减小可知,

抛物线开口向上,  $m > 0$ ,

且对称轴  $\frac{1}{m} \geq \frac{1}{5}$ , 解得  $m \leq 5$ , 故答案为:  $0 < m \leq 5$ .

5. 把二次函数  $y = x^2 - 2x + 3$  的图象绕原点旋转  $180^\circ$  后得到的图象的函数解析式为  $y = -x^2 - 2x - 3$ .

【解答】解:  $\because$  抛物线  $y = x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2$  的顶点坐标为  $(1, 2)$ ,

$\therefore$  绕原点旋转  $180^\circ$  后的抛物线的顶点坐标为  $(-1, -2)$ ,

$\therefore$  所得到的图象的解析式为  $y = -(x + 1)^2 - 2$ , 即  $y = -x^2 - 2x - 3$ .

故答案为  $y = -x^2 - 2x - 3$ .

6. 某游乐场的圆形喷水池中心  $O$  有一雕塑  $OA$ , 从  $A$  点向四周喷水, 喷出的水柱为抛物线, 且形状相同. 如图, 以水平方向为  $x$  轴, 点  $O$  为原点建立直角坐标系, 点  $A$  在  $y$  轴上,  $x$  轴上的点  $C, D$  为水柱的落水点, 水柱所在抛物线第一象限部分的函数表达式为  $y = -\frac{1}{6}(x-5)^2 + 6$ , 则  $CD$  的长为 22  $m$ .

【解答】解: 当  $y=0$  时,  $-\frac{1}{6}(x-5)^2 + 6 = 0$ ,

解得:  $x_1 = -1$  (舍去),  $x_2 = 11$ ,

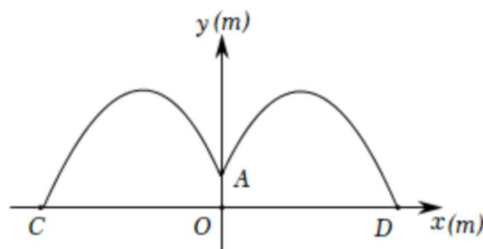
$\therefore$  点  $D$  的坐标为  $(11, 0)$ ,

$\therefore OD = 11m$ .

$\therefore$  从  $A$  点向四周喷水, 喷出的水柱为抛物线, 且形状相同,

$\therefore OC = OD = 11m$ ,

$\therefore CD = OC + OD = 22m$ . 故答案为: 22.



7. 在平面直角坐标系中, 函数  $y = x^2 - 2x - 3$  的图象与  $x$  轴交于点  $A, B$ , 将函数  $y = x^2 - 2x - 3$  的图象向上平移, 平移后的图象与  $x$  轴交于点  $C, D$ . 若  $AB = 2CD$ , 则平移后的图象对应的函数表达式为  $y = x^2 - 2x$ .

【解答】解: 当  $y=0$  时,  $x^2 - 2x - 3 = 0$ , 解得  $x_1 = 3, x_2 = -1$ ,

$\therefore A(-1, 0), B(3, 0)$ ,  $\therefore AB = 3 - (-1) = 4$ ,

$\therefore AB = 2CD, \therefore CD = 2$ ,

$\therefore$  函数  $y = x^2 - 2x - 3$  的图象向上平移时对称轴不变, 仍然为直线  $x = 1$ ,

$\therefore C(0, 0), D(2, 0)$ ,  $\therefore$  平移后抛物线的解析式为  $y = x(x - 2)$ , 即  $y = x^2 - 2x$ . 故答案为:  $y = x^2 - 2x$ .

8. 已知二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  的图象如图所示, 顶点为  $(-1, 0)$ , 则下列结论:

①  $abc < 0$ ; ②  $b^2 - 4ac = 0$ ; ③  $2a - b = 0$ ; ④  $a > 2$ ; ⑤  $4a - 2b + c < 0$ .

其中正确结论的个数是 ( )

A. 2 个

B. 3 个

C. 4 个

D. 5 个

【解答】解:  $\because$  顶点为  $(-1, 0)$ ,  $\therefore x_{\text{对}} = -1$ ,

$\therefore$  开口方向向上,  $\therefore a > 0$ ,

$\therefore x_{\text{对}} = -1 \therefore b > 0$ ,

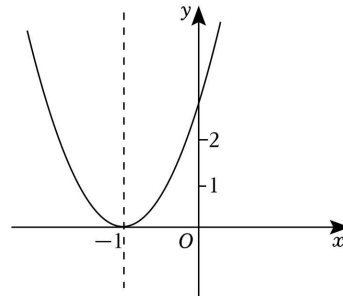
$\therefore$  与  $y$  轴交于正半轴,  $\therefore c > 0$ ,  $\therefore abc > 0$ , 故①错误,

$\therefore$  函数图象与  $x$  轴只有一个交点,  $\therefore b^2 - 4ac = 0$ , 故②正确,

$\therefore x_{\text{对}} = -1, \therefore -\frac{b}{2a} = -1, \therefore 2a - b = 0$ , 故③正确,

由图象可得  $c > 2$ , 图象过  $(-1, 0)$ ,  $\therefore a - b + c = 0$ ,  $\therefore a - 2a + c = 0$ , 即:  $c = a$ ,  $\therefore a > 2$ , 故④正确,

当  $x = -2$  时,  $4a - 2b + c > 0$ , 故⑤错误, 故选: B.



9. 抛物线  $y = ax^2 + bx + 2$  经过点  $A(m-1, n)$ 、 $B(-m-1, n)$ 、 $C(1, p)$ , 且  $p < 2$ , 则该抛物线的顶点在 ( )

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

【解答】解:  $\because$  抛物线  $y = ax^2 + bx + 2$  经过点  $A(m-1, n)$ 、 $B(-m-1, n)$ ,

$\therefore$  该抛物线的对称轴为直线  $x = \frac{(m-1) + (-m-1)}{2} = \frac{m-1-m-1}{2} = -1, \therefore -\frac{b}{2a} = -1, \therefore b = 2a$ ,

$\therefore$  抛物线  $y = ax^2 + bx + 2$  经过点  $C(1, p)$ , 且  $p < 2, \therefore a + b + 2 < 2, \therefore a + b < 0, \therefore a + 2a < 0$ ,

$\therefore a < 0, \therefore b = 2a < 0, \therefore$  该抛物线的对称轴在  $y$  轴左侧, 开口向下,

又  $\because x = 0$  时  $y = 2, \therefore$  该抛物线的顶点坐标在第二象限, 故选: B.

10. 如图,在平面直角坐标系中,  $A(4,0)$ 、 $B(0,3)$ ,以点  $B$  为圆心, 2 为半径的  $\odot B$  上有一动点  $P$ . 连接  $AP$ , 若点  $C$  为  $AP$  的中点, 连接  $OC$ , 则  $OC$  的最小值是?( )

A. 1.5

B. 2

C. 2.5

D. 3

【解答】解:如图,取点  $D(-4,0)$ , 连接  $PD$ ,

$\because C$  是  $AP$  的中点,  $O$  是  $AD$  的中点,

$\therefore OC$  是  $\triangle APD$  的中位线,

$$\therefore OC = \frac{1}{2}PD,$$

连接  $BD$  交  $\odot B$  于  $E$ ,

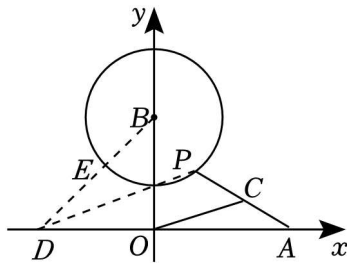
$$\because OD = 4, OB = 3,$$

$$\therefore BD = \sqrt{OB^2 + OD^2} = 5,$$

当点  $P$  与点  $E$  重合时,  $PD$  最小为  $5 - 2 = 3$ ,

$$\therefore OC \text{ 的最小值为: } \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2} = 1.5.$$

故选: A.



11. 一副三角板如图所示放置,  $\triangle ABC$  中  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $\angle BAC = 60^\circ$ , 等腰  $Rt\triangle BCD$  中  $\angle BDC = 90^\circ$ , 连接  $AD$ , 则  $\tan \angle ADC$  的值为  $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ .

【解答】解: 设  $AC = x$ ,  $\because \angle ACB = 90^\circ$ ,  $\angle BAC = 60^\circ$ ,  $\therefore BC = \sqrt{3}AC = \sqrt{3}x$ ,

等腰  $Rt\triangle BCD$  中,  $\angle BDC = 90^\circ$ ,  $\therefore CD = \frac{\sqrt{2}}{2}BC = \frac{\sqrt{6}}{2}x$ ,

过点  $D$  作  $DF \perp BC$  于  $F$ , 过点  $A$  作  $AE \perp CD$  于点  $E$ ,

$\because \triangle BCD$  是等腰直角三角形,

$$\therefore BF = CF = \frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

$$\because AE \perp CD, \therefore S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}AC \cdot CF = \frac{1}{2}CD \cdot AE,$$

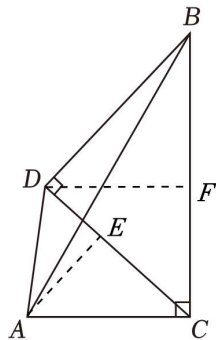
$$\therefore AC \cdot CF = CD \cdot AE, \therefore AE = \frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

$$\therefore CE = \sqrt{AC^2 - AE^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

$$\therefore DE = CD - CE = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}x,$$

$$\therefore \tan \angle ADC = \frac{AE}{DE} = \frac{\sqrt{3}+1}{2},$$

故答案为:  $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ .



12. 已知二次函数  $y = (x-m)^2 - 1$  ( $m$  为常数).

(1) 求证: 不论  $m$  为何值, 该函数图象与  $x$  轴总有两个公共点;

(2) 当  $1 \leq x \leq 3$  时,  $y$  的最小值为 3, 求  $m$  的值.

【解答】(1) 证明: 当  $y = 0$  时,  $(x-m)^2 - 1 = 0$ , 即:  $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ ,

$\because \Delta = 4m^2 - 4(m^2 - 1) = 4 > 0$  即不论  $m$  为何值, 该函数图象与  $x$  轴总有两个公共点;

(2) 抛物线的对称轴为直线  $x = m$ ,

当  $m < 1$  时,  $y$  随  $x$  增大而增大, 故当  $x = 1$  时,  $y$  有最小值.  $x = 1$  时,  $y = 3$ , 所以  $(1-m)^2 - 1 = 3$ ,

解得  $m_1 = 3$  (舍去),  $m_2 = -1$ ; 当  $1 < m < 3$  时,  $x = m$ ,  $y = -1$  不合题意舍去;

当  $m > 3$  时,  $y$  随  $x$  增大而减小, 故当  $x = 3$  时,  $y$  有最小值, 当  $x = 3$  时,  $y = 3$ ,

所以  $(3-m)^2 - 1 = 3$ , 解得  $m_1 = 1$  (舍去),  $m_2 = 5$ ; 综上所述,  $m$  的值为  $-1$  或  $5$ .

13. 如图, 直线  $y = \frac{1}{2}x + 2$  分别与  $x$  轴、 $y$  轴交于  $C$ 、 $D$  两点, 二次函数  $y = -x^2 + bx + c$  的图象经过点  $D$ , 与直线相交于点  $E$ , 且  $CD:DE = 4:3$ .

(1) 求点  $E$  的坐标和二次函数表达式; (2) 过点  $D$  的直线交  $x$  轴于点  $M$ .

① 当  $DM$  与  $x$  轴的夹角等于  $2\angle DCO$  时, 请直接写出点  $M$  的坐标;

② 当  $DM \perp CD$  时, 过抛物线上一动点  $P$  (不与点  $D$ 、 $E$  重合), 作  $DM$  的平行线交直线  $CD$  于点  $Q$ , 若以  $D$ 、 $M$ 、 $P$ 、 $Q$  为顶点的四边形是平行四边形, 求点  $P$  的横坐标.

**【解答】解:** (1) 当  $y = 0$  时,  $\frac{1}{2}x + 2 = 0$ , 解得:  $x = -4$ ,  $\therefore$  点  $C$  的坐标为  $(-4, 0)$ .

过点  $D$  作直线  $DF \parallel x$  轴, 过点  $E$  作  $EF \parallel y$  轴, 交直线  $DF$  于点  $F$ , 如图 1 所示.

$\because DF \parallel x$  轴,  $EF \parallel y$  轴,  $\therefore \angle OCD = \angle FDE$ ,  $\angle ODC = \angle FED$ ,

$\therefore \triangle OCD \sim \triangle FDE$ ,  $\therefore \frac{OC}{FD} = \frac{CD}{DE} = \frac{4}{3}$ ,  $\therefore FD = 3$ . 当  $x = 3$  时,  $y = \frac{1}{2}x + 2 = \frac{7}{2}$ ,  $\therefore$  点  $E$  为  $(3, \frac{7}{2})$ .

当  $x = 0$  时,  $y = \frac{1}{2}x + 2 = 2$ ,  $\therefore$  点  $D$  的坐标为  $(0, 2)$ . 将  $D(0, 2)$ ,  $E(3, \frac{7}{2})$  代入  $y = -x^2 + bx + c$ ,

得:  $\begin{cases} c = 2 \\ -9 + 3b + c = \frac{7}{2} \end{cases}$ , 解得:  $\begin{cases} b = \frac{7}{2} \\ c = 2 \end{cases}$ ,  $\therefore$  二次函数表达式为  $y = -x^2 + \frac{7}{2}x + 2$ .

(2) ① 分两种情况考虑, 如图 2 所示. (i) 当点  $M$  在  $x$  轴负半轴时,  $\because \angle DM_1O = 2\angle DCO$ ,

$\therefore \angle M_1CD = \angle M_1DC$ ,  $\therefore M_1C = M_1D$ . 设  $OM_1 = x$ , 则  $CM_1 = DM_1 = 4 - x$ .

在  $Rt\triangle ODM_1$  中,  $OM_1 = x$ ,  $OD = 2$ ,  $DM_1 = 4 - x$ ,  $\therefore (4 - x)^2 = 2^2 + x^2$ , 解得:  $x = \frac{3}{2}$ ,  $\therefore$  点  $M_1$  为  $(-\frac{3}{2}, 0)$ ;

(ii) 当点  $M$  在  $x$  轴正半轴时,  $\because \angle DM_2O = \angle DM_1O = 2\angle DCO$ ,  $\therefore M_1O = M_2O$ ,  $\therefore$  点  $M_2$  的坐标为  $(\frac{3}{2}, 0)$ .

综上所述: 当  $DM$  与  $x$  轴的夹角等于  $2\angle DCO$  时, 点  $M$  的坐标为  $(-\frac{3}{2}, 0)$  或  $(\frac{3}{2}, 0)$ .

②  $\because DM \perp CD$ ,  $\therefore \angle CDO + \angle DCO = \angle CDO + \angle MDO = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle MDO = \angle DCO$ ,  $\therefore \frac{OM}{OD} = \frac{OD}{OC}$ , 即  $\frac{OM}{2} = \frac{2}{4}$ ,  $\therefore OM = 1$ ,  $\therefore$  点  $M$  的坐标为  $(1, 0)$ .

设点  $P$  的坐标为  $(x, -x^2 + \frac{7}{2}x + 2)$ . 分两种情况考虑, 如图 3 所示.

(i) 当点  $P$  在直线  $CD$  下方时,  $\because$  点  $D$  的坐标为  $(0, 2)$ , 点  $M$  的坐标为  $(1, 0)$ , 且四边形  $DMPQ$  为平行四边形,

$\therefore$  点  $Q$  的坐标为  $(x - 1, -x^2 + \frac{7}{2}x + 4)$ . 又  $\because$  点  $Q$  在直线  $CD$  上,  $\therefore -x^2 + \frac{7}{2}x + 4 = \frac{1}{2}(x - 1) + 2$ ,

整理, 得:  $2x^2 - 6x - 5 = 0$ , 解得:  $x_1 = \frac{3 - \sqrt{19}}{2}$ ,  $x_2 = \frac{3 + \sqrt{19}}{2}$ ;

(ii) 点  $P$  在直线  $CD$  上方时,  $\because$  点  $D$  的坐标为  $(0, 2)$ , 点  $M$  的坐标为  $(1, 0)$ , 且四边形  $DMQP$  为平行四边形,

$\therefore$  点  $Q$  的坐标为  $(x + 1, -x^2 + \frac{7}{2}x)$ . 又  $\because$  点  $Q$  在直线  $CD$  上,  $\therefore -x^2 + \frac{7}{2}x = \frac{1}{2}(x + 1) + 2$ , 整理, 得:  $2x^2 - 6x + 5 = 0$ ,  $\because \Delta = (-6)^2 - 4 \times 2 \times 5 = -4 < 0$ ,  $\therefore$  该种情况不存在.

综上所述: 当以  $D$ 、 $M$ 、 $P$ 、 $Q$  为顶点的四边形是平行四边形时, 点  $P$  的横坐标为  $\frac{3 - \sqrt{19}}{2}$  或  $\frac{3 + \sqrt{19}}{2}$ .

