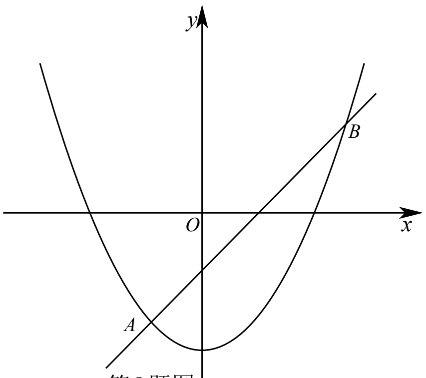
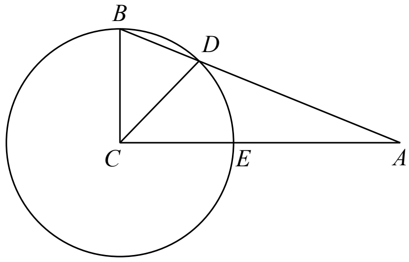
2024秋季初三上数学期中每日一练002

1. 点 $P_1(-2,y_1)$，$P_2(2,y_2)$，$P_3(4,y_3)$ 均在二次函数 $y=-x^2+2x+c$ 的图象上，则 y_1，y_2，y_3 的大小关系是_________.

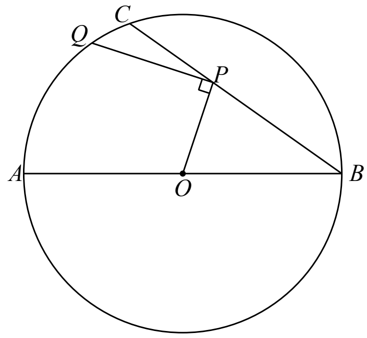
2. 如图，抛物线 $y=ax^2+c$ 与直线 $y=mx+n$ 交于 $A(-1,p)$，$B(3,q)$ 两点，则不等式 $ax^2+mx+c>n$ 的解集是______________.



第2题图



第4题图



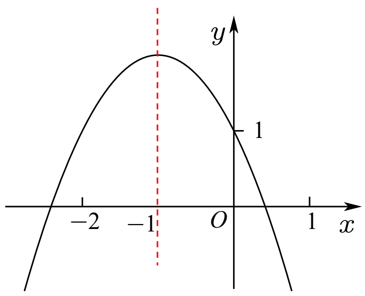
第5题图

3. 汽车刹车后行驶的距离 s(单位：m) 关于行驶时间 t(单位：s) 的函数解析式为 $s=15t-6t^2$，则汽车刹车后到停下来需要_________秒.

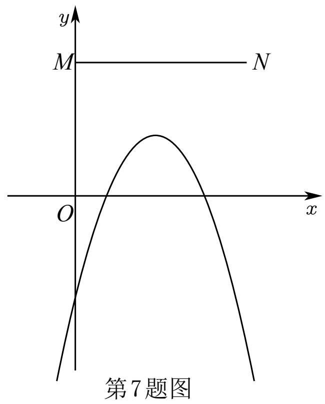
4. 如图，在 $Rt\Delta ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A=28°$，以点 C 为圆心，BC 为半径的圆分别交 AB、AC 于点 D、点 E，则弧 BD 的度数为______________.

5. 如图，在 $\odot O$ 中，直径 $AB=4$，BC 是弦，$\angle ABC=30°$，点 P 在 BC 上移动，点 Q 在 $\odot O$ 上移动，且 $OP\perp PQ$，PQ 长的最大值是______________.

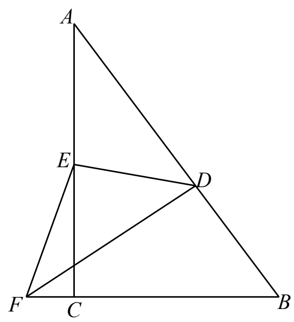
6. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，有以下结论：① $abc>0$；② $a+b+c<0$；③ $a-b+c>1$；④ $4a-2b+c<0$；⑤ $4ac-4a>b^2$，⑥ $a<-\frac{1}{3}$．其中正确结论的序号为__________.



第6题图



第7题图



第8题图

7. 如图，已知抛物线 $y=-x^2+4x-2$ 和线段 MN，点 M 和点 N 的坐标分别为 $(0,4)$，$(5,4)$，将抛物线向上平移 $k(k>0)$ 个单位长度后与线段 MN 仅有一个交点，则 k 的取值范围是__________.

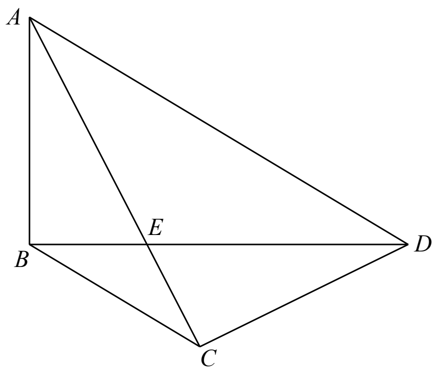
8. 记抛物线 C_1:$y=(x-2)^2+3$ 的顶点为 A，抛物线 C_2:$y=ax^2+1(a<0)$ 顶点是点 B，且与 x 轴的正半轴交于点 C．当 ΔABC 是直角三角形时，抛物线 C_2 的解析式为______________.

9. 如图，在 $Rt\Delta ABC$，$\angle ACB=90°$，$AC=4$，$BC=3$，点 D，E 分别在 AB，AC 上，连接 DE，将 ΔADE 沿 DE 翻折，使点 A 的对应点 F 落在 BC 的延长线上，若 FD 平分 $\angle EFB$，则 AD 的长为_____________.

10. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB \perp BD$，$BC \parallel AD$，连接 AC 交 BD 于点 E，$\angle BAC = \angle ADB$，且 $\tan\angle ADB = \frac{1}{2}$，$AE = \frac{3}{2}\sqrt{5}$．

(1) 求 BD 的长；

(2) 若 $BC = \sqrt{5}$，求 CD 的长．



11. 已知二次函数 $y = ax^2 - 4ax$（a 为常数）．

(1) 求证：该函数的图象与 x 轴总有两个公共点；

(2) 该函数图象必过两个定点，它们的坐标分别为 ________、________；

(3) 当 $0 < x < 4$ 时，$y < 4$，直接写出 a 的取值范围．

12. 某超市拟端午节前 50 天销售某品牌食品，该食品进价为 18 元/千克，设第 x 天的销售价格 y 元/千克，销售量为 m 千克．销售价格 y(元/千克) 当 $31 \leqslant x \leqslant 50$ 时，y 与 x 满足一次函数关系．

销售价格 y(元/千克)	40	37	33
第 x 天	$1 \leqslant x \leqslant 30$	36	44
第 x 天销售量 m	$5x + 50$		

(1) 求 $31 \leqslant x \leqslant 50$ 时，y 与 x 的函数关系式；

(2) 求 x 为多少时，当天销售利润最大？

(3) 若超市希望 31 天至 35 天日销售利润 W 随 x 的增大而增大，则在当天的销售价格上涨 a 元/千克，求整数 a 的最小值．

002参考答案与试题解析

1. 点 $P_1(-2,y_1)$，$P_2(2,y_2)$，$P_3(4,y_3)$ 均在二次函数 $y=-x^2+2x+c$ 的图象上，则 y_1，y_2，y_3 的大小关系是 $\underline{y_2>y_1=y_3}$

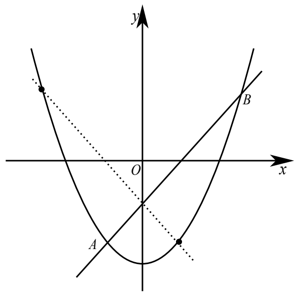
【解答】解：$\because y=-x^2+2x+c=-(x-1)^2+1+c$，

$\therefore$ 图象的开口向下，对称轴是直线 $x=1$，$A(-2,y_1)$ 关于对称轴的对称点为 $(4,y_1)$，

$\because 2<4$，$\therefore y_2>y_1=y_3$.

2. 如图，抛物线 $y=ax^2+c$ 与直线 $y=mx+n$ 交于 $A(-1,p)$，$B(3,q)$ 两点，则不等式 $ax^2+mx+c>n$ 的解集是 __$x<-3$ 或 $x>1$__.

【解答】解：$\because$ 直线 $y=mx+n$ 与直线 $y=-mx+n$ 关于 y 轴对称，抛物线 $y=ax^2+c$ 与直线 $y=mx+n$ 交于 $A(-1,p)$，$B(3,q)$ 两点，



$\therefore$ 抛物线 $y=ax^2+c$ 与直线 $y=-mx+n$ 交于 $(1,p)$，$(-3,q)$ 两点，

观察函数图象可知：当 $x<-3$ 或 $x>1$ 时，

直线 $y=-mx+n$ 在抛物线 $y=ax^2+c$ 的下方，

$\therefore$ 不等式 $ax^2+c>-mx+n$ 的解集为 $x<-3$ 或 $x>1$，

即不等式 $ax^2+mx+c>n$ 的解集是 $x<-3$ 或 $x>1$.

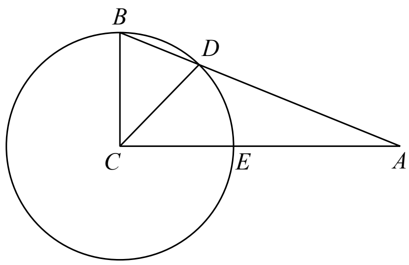
故答案为：$x<-3$ 或 $x>1$.

3. 汽车刹车后行驶的距离 s(单位：m) 关于行驶时间 t(单位：s) 的函数解析式为 $s=15t-6t^2$，则汽车刹车后到停下来需要 __$\frac{5}{4}$__秒.

【解答】解：$\because s=15t-6t^2=-6\left(t-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{75}{8}$，

$\because -6<0$，$\therefore$ 当 $t=\frac{5}{4}$ 时，s 取最大值，即汽车刹车后到停下来，故答案为：$\frac{5}{4}$.

4. 如图，在 $Rt\Delta ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle A=28^\circ$，以点 C 为圆心，BC 为半径的圆分别交 AB、AC 于点 D、点 E，则弧 BD 的度数为 __56°__.



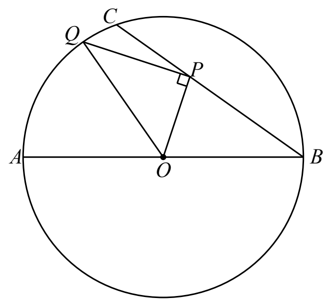
【解答】解：$\because \angle C=90^\circ$，$\angle A=28^\circ$，$\therefore \angle B=62^\circ$，

$\because CB=CD$，$\therefore \angle CDB=\angle B=62^\circ$，

$\therefore \angle BCD=180^\circ-62^\circ-62^\circ=56^\circ$，

$\therefore \overset{\frown}{BD}$ 的度数为 56°.

5. 如图，在 $\odot O$ 中，直径 $AB=4$，BC 是弦，$\angle ABC=30^\circ$，点 P 在 BC 上移动，点 Q 在 $\odot O$ 上移动，且 $OP\perp PQ$，PQ 长的最大值是__$\sqrt{3}$__.



【解答】解：如图，连接 OQ，

$\because PQ=\sqrt{OQ^2-OP^2}$，且 $OQ=2$，$\therefore$ 当 OP 最小时，PQ 最大，

易得当 $OP\perp BC$ 时，OP 的值最小，

$\because \angle ABC=30^\circ$，$\therefore OP=\frac{1}{2}OB=1$，

$\therefore PQ=\sqrt{OQ^2-OP^2}=\sqrt{3}$，故选：$C$.

6. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，有以下结论：① $abc>0$；② $a+b+c<0$；③ $a-b+c>1$；④ $4a-2b+c<0$；⑤ $4ac-4a>b^2$，⑥ $a<-\frac{1}{3}$. 其中正确结论的序号为 __①②③⑥__.

【解答】解：①由图象可得：$a<0$，$b<0$，$c=1>0$，$abc>0$，故正确；

②$\because x=1$ 时，$y<0$，$\therefore a+b+c<0$，故正确；

③∵$x=-1$时，$y>1$，∴$a-b+c>1$，故正确；

④∵对称轴为直线$x=-1$，当$x=0$时，$y=1$，

∴$x=-2$时，$y>0$，∴$4a-2b+c>0$；故错误；

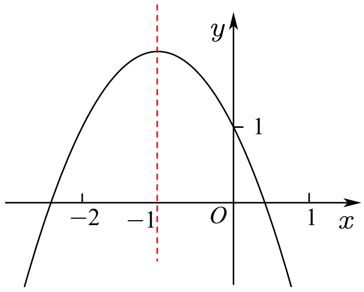
⑤∵$c=1$，∴$4ac-4a=0$，∴$4ac-4a<b^2$，故错误；

⑥抛物线对称轴为直线$x=-1$，∴$x=-\frac{b}{2a}=-1$，∴$b=2a$，

又$c=1$，∵$a+b+c<0$，∴$a+2a+1<0$，即$3a+1<0$，

∴$a<-\frac{1}{3}$，故⑥正确.

故答案为：①②③⑥.



7. 如图，已知抛物线$y=-x^2+4x-2$和线段MN，点M和点N的坐标分别为$(0,4)$，$(5,4)$，将抛物线向上平移$k(k>0)$个单位长度后与线段MN仅有一个交点，则k的范围是 $\underline{\quad 6<k\leqslant 11\text{ 或 }k=2\quad}$.

【解答】解：$y=-x^2+4x-2=-(x-2)^2+2$，

将抛物线向上平移$k(k>0)$个单位长度后抛物线为$y=-(x-2)^2+2+k$，

当抛物线顶点恰好平移到线段MN上，此时，$2+k=4$，可得$k=2$；

当抛物线经过点$M(0,4)$时，此时$-(0-2)^2+2+k=4$，可得$k=6$，

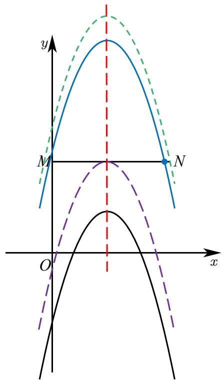
此时$M(0,4)$关于对称轴$x=2$对称的点$M'(4,4)$，在线段MN上，不符合题意；

当抛物线经过点$N(5,4)$时，此时$-(5-2)^2+2+k=4$，可得$k=11$，

此时$N(5,4)$关于对称轴$x=2$对称的点$N'(-1,4)$，不在线段MN上，符合题意；

结合图形可知，平移后的抛物线与线段MN仅有一个交点时，$k=2$或$6<k\leqslant 11$；

故答案为：$k=2$或$6<k\leqslant 11$.



8. 记抛物线C_1:$y=(x-2)^2+3$的顶点为A，抛物线C_2:$y=ax^2+1(a<0)$顶点是点B，且与x轴的正半轴交于点C．当ΔABC是直角三角形时，抛物线C_2的解析式为 $\underline{\quad y=-x^2+1\text{ 或 }y=-\frac{1}{25}x^2+1\quad}$.

【解答】解：由$y=(x-2)^2+3$和$y=ax^2+1(a<0)$知：$A(2,3)$、$B(0,1)$，∴$AB^2=(2-0)^2+(3-1)^2=8$.

∵抛物线C_2的顶点$B(0,1)$在y轴上，∴抛物线C_2的解析式为$y=ax^2+1$.

设点C坐标为$(c,0)$，∴$AC^2=(2-c)^2+3^2=c^2-4c+13$，$BC^2=c^2+1$.

∵ΔABC是直角三角形，则：①当$\angle ABC=90^\circ$时，$AC^2=BC^2+AB^2$，

即$c^2-4c+13=(c^2+1)+8$，解得：$c=1$∴$C_1(1,0)$，

将点C_1坐标代入$y=ax^2+1$得：$a+1=0$；

解得：$a=-1$，∴抛物线C_2的解析式为：$y=-x^2+1$，

②当$\angle BAC=90^\circ$时，$BC^2=AC^2+AB^2$，即$c^2+1=(c^2-4c+13)+8$，

解得：$c=5$，∴$C_2(5,0)$，

将点C_2坐标代入$y=ax^2+1$得：

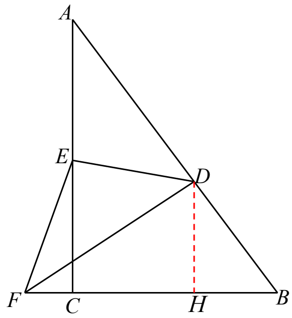
$25a+1=0$，解得：$a=-\frac{1}{25}$，

∴抛物线C_2的解析式为：$y=-\frac{1}{25}x^2+1$，

综上，当ΔABC为直角三角形时，抛物线C_2的解析式为：$y=-x^2+1$或$y=-\frac{1}{25}x^2+1$.

故答案为：$y=-x^2+1$或$y=-\frac{1}{25}x^2+1$.

9. 如图，在 $Rt\Delta ABC$，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=4$，$BC=3$，点 D，E 分别在 AB，AC 上，连接 DE，将 ΔADE 沿 DE 翻折，使点 A 的对应点 F 落在 BC 的延长线上，若 FD 平分 $\angle EFB$，则 AD 的长为___$\frac{20}{7}$____.



【解答】解：作 $DH\perp BC$ 于 H，在 $Rt\Delta ABC$ 纸片中，$\angle ACB=90^\circ$，

由勾股定理得：$AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

$\because$ 将 ΔADE 沿 DE 翻折得 ΔDEF，$\therefore AD=DF$，$\angle A=\angle DFE$，

$\because FD$ 平分 $\angle EFB$，$\therefore \angle DFE=\angle DFH$，$\therefore \angle DFH=\angle A$，

设 $DH=3x$，在 $Rt\Delta DHF$ 中，$\sin\angle DFH=\sin A=\frac{3}{5}$，$\therefore DF=5x$，$\therefore BD=5-5x$，

$\because \Delta BDH\backsim\Delta BAC$，$\therefore \frac{BD}{AB}=\frac{DH}{AC}$，$\therefore \frac{5-5x}{5}=\frac{3x}{4}$，$\therefore x=\frac{4}{7}$，

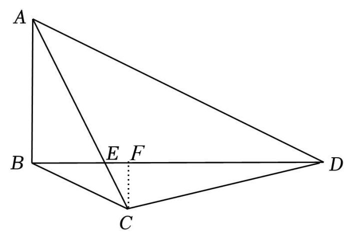
$\therefore AD=5x=\frac{20}{7}$.

10. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp BD$，$BC\parallel AD$，连接 AC 交 BD 于点 E，$\angle BAC=\angle ADB$，且 $\tan\angle ADB=\frac{1}{2}$，$AE=\frac{3}{2}\sqrt{5}$.

(1) 求 BD 的长；(2) 若 $BC=\sqrt{5}$，求 CD 的长.

【解答】解：(1) $\because$ 在四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp BD$，$\therefore \triangle ABE$ 和 $\triangle ABD$ 都是直角三角形，

$\because \angle BAC=\angle ADB$，$\therefore \tan\angle BAC=\tan\angle ADB=\frac{1}{2}$，$\therefore \frac{BE}{AB}=\frac{AB}{BD}=\frac{1}{2}$，



设 $BE=a$，则 $AB=2a$，$BD=4a$，

由勾股定理得，$AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\sqrt{5}a=\frac{3}{2}\sqrt{5}$，解得 $a=\frac{3}{2}$，

$\therefore BD=4a=6$，$\therefore BD$ 的长为 6；

(2) 如图，过 C 作 $CF\perp BD$ 于 F，$\because BC\parallel AD$，$\therefore \angle DBC=\angle ADB$，

$\therefore \tan\angle DBC=\frac{CF}{BF}=\frac{1}{2}$，设 $CF=b$，则 $BF=2b$，由勾股定理得，$BC=\sqrt{CF^2+BF^2}=\sqrt{5}b=\sqrt{5}$，

解得 $b=1$，$\therefore BF=2$，$DF=BD-BF=4$，$\therefore CD=\sqrt{CF^2+DF^2}=\sqrt{17}$，$\therefore CD$ 的长为 $\sqrt{17}$.

11. 已知二次函数 $y=ax^2-4ax$（a 为常数）.

(1) 求证：该函数的图象与 x 轴总有两个公共点；

(2) 该函数图象必过两个定点，它们的坐标分别为 __(0,0)__、__(4,0)__；

(3) 当 $0<x<4$ 时，$y<4$，直接写出 a 的取值范围.

【解答】(1) 证：由题，$(-4a)^2-4a\times 0=16a^2$，$\because a\neq 0$，$\therefore 16a^2>0$，

$\therefore$ 该函数图象与 x 轴总有两公共点.

(2) 解：因为 $y=ax^2-4ax=(x^2-4x)a$，

又因为函数图象必过两个定点，即与 a 的取值无关，

所以 $x^2-4x=0$，解得 $x=0$ 或 4，所以定点的坐标为 (0,0) 和 (4,0).

故答案为：(0,0)，(4,0).

(3) 解：因为抛物线过定点 $(0,0)$ 和 $(4,0)$，

若 $a>0$，$0<x<4$ 时，此时抛物线都在 x 轴下方，满足 $y<4$.

若 $a<0$，$0<x<4$ 时，当 $x=2$ 时的函数值小于 4，

即 $4a-8a<4$，解得 $a>-1$，

所以 $-1<a<0$.

综上所述，$-1<a<0$ 或 $a>0$.

12. 某超市拟端午节前 50 天销售某品牌食品，该食品进价为 18 元/千克，设第 x 天的销售价格 y 元/千克，销售量为 m 千克．销售价格 y(元/千克) 当 $31\leqslant x\leqslant 50$ 时，y 与 x 满足一次函数关系.

销售价格 y(元/千克)	40	37	33
第 x 天	$1\leqslant x\leqslant 30$	36	44
第 x 天销售量 m	$5x+50$		

(1) 求 $31\leqslant x\leqslant 50$ 时，y 与 x 的函数关系式；

(2) 求 x 为多少时，当天销售利润最大？

(3) 若超市希望 31 天至 35 天日销售利润 W 随 x 的增大而增大，则在当天的销售价格上涨 a 元/千克，求整数 a 的最小值.

【解答】解：(1) 依题意，当 $x=36$ 时，$y=37$；$x=44$ 时，$y=33$，

当 $31\leqslant x\leqslant 50$ 时，设 $y=kx+b$，则有 $\begin{cases}37=36k+b\\33=44k+b\end{cases}$，解得 $\begin{cases}k=-\dfrac{1}{2}\\b=55\end{cases}$，

$\therefore y$ 与 x 的关系式为：$y=-\dfrac{1}{2}x+55$；

(2) 依题意，

$\because W=(y-18)\cdot m$，

$$\therefore W=\begin{cases}(40-18)\times(5x+50), & (1\leqslant x\leqslant 30)\\\left(-\dfrac{1}{2}x+55-18\right)\times(5x+50), & (31\leqslant x\leqslant 50)\end{cases},$$

整理得，$W=\begin{cases}110x+1100, & (1\leqslant x\leqslant 30)\\-\dfrac{5}{2}x^2+160x+1850, & (31\leqslant x\leqslant 50)\end{cases}$，

当 $1\leqslant x\leqslant 30$ 时，

$\because W$ 随 x 增大而增大，

$\therefore x=30$ 时，取最大值 $W=30\times110+1100=4400$，

当 $31\leqslant x\leqslant 50$ 时，

$W=\dfrac{5}{2}x^2+160x+1850=-\dfrac{5}{2}(x-32)^2+4410$，

$\because -\dfrac{5}{2}<0$，$\therefore x=32$ 时，W 取得最大值，此时 $W=4410$，

综上所述，x 为 32 时，当天的销售利润 W(元) 最大，最大利润为 4410 元.

(3) 解：依题意，得，

$W=(y+a-18)\cdot m=-\dfrac{5}{2}x^2+(160+5a)x+1850+50a$，

$\because$ 第 31 天到第 35 天的日销售利润 W(元) 随 x 的增大而增大，

$\therefore$ 对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{160+5a}{2\times\left(-\dfrac{5}{2}\right)}>34.5$，得 $a>2.5$，

故整数 a 的最小值为 3.