2024年初三数学期中考试复习冲刺练习(3)

参考答案与解析

第3练：二次函数与线段长和面积最值

一、斜线段转化为竖直线段

1. 已知抛物线 $y=x^2-2x-3$ 与 x 轴交于点 A，B(点 A 在点 B 的左侧)，与 y 轴交于点 C.

(1) 直接写出 A，B，C 三点的坐标；

(2) 如图1，点 P 为直线 BC 下方抛物线上一点，$PD\perp BC$ 于点 D，求 PD 的最大值；

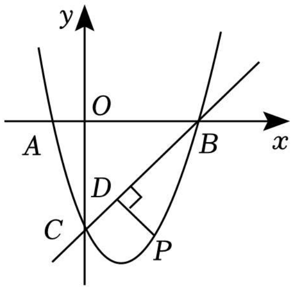


图1

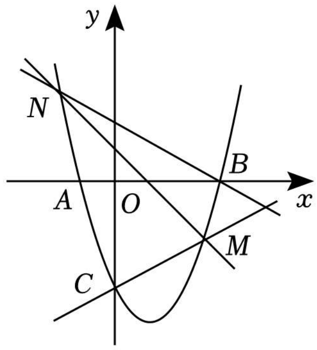


图2

【解析】(1) 解：对于 $y=x^2-2x-3$，令 $y=0$，则 $0=x^2-2x-3$，

$\therefore x_1=-1$，$x_2=3$，

$\therefore$ 点 $A(-1,0)$，点 $B(3,0)$，令 $x=0$，则 $y=-3$，

$\therefore$ 点 $C(0,-3)$；

(2) 解：过点 P 作 $PE\perp x$ 轴于 E，交 BC 于点 F，如图1:

设直线 BC 的解析式为 $y=kx+b$，

将点 $B(3,0)$，$C(0,-3)$ 代入 $y=kx+b$ 得：$\begin{cases}3k+b=0\\b=-3\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}k=1\\b=-3\end{cases}$，

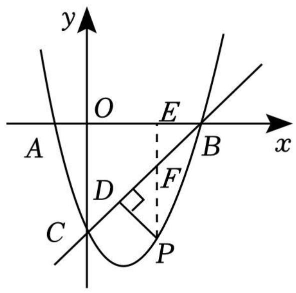


图1

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y=x-3$，

设 $P(x,x^2-2x-3)$，则 $F(x,x-3)$，

$\therefore PF=x-3-(x^2-2x-3)=-x^2+3x$，

$\because PE\perp x$ 轴，

$\therefore PE\parallel y$ 轴，

$\therefore \angle PFD=\angle BCO$，

$\because \angle PDF=\angle BOC=90^\circ$，

$\therefore \Delta PDF\backsim\Delta BCO$，

$\therefore \dfrac{PD}{OB}=\dfrac{PF}{BC}$，

$\because B(3,0)$，$C(0,-3)$，

$\therefore OB=3$，$OC=3$，

$\therefore BC=3\sqrt{2}$，

$\therefore \dfrac{PD}{3}=\dfrac{-x^2+3x}{3\sqrt{2}}$，

$\therefore PD=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x^2+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}x$，

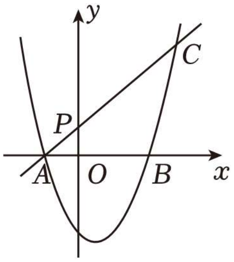
$\therefore$ 当 $x=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{3}{2}$ 时，PD 最大为 $\dfrac{9\sqrt{2}}{8}$；

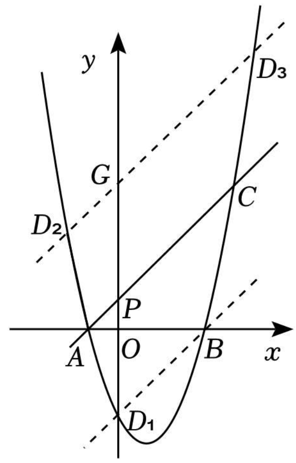
二、点到直线的距离相等与平行转化，再分类讨论

2. 抛物线 $y=x^2-2x-3$ 交 x 轴于 A，B 两点（A 在 B 的左边），C 是第一象限抛物线上一点，直线 AC 交 y 轴于点 P.

(1) 求 A，B 两点的坐标；

(2) 如图，当 $OP=OA$ 时，在抛物线上存在点 D(异于点 B)，使 B，D 两点到 AC 的距离相等，求出所有满足条件的点 D 的横坐标.





【解析】解：(1) ∵ 抛物线 $y=x^2-2x-3$ 交 x 轴于 A，B 两点（A 在 B 的左边），

∴ 令 $y=0$，可得：$x^2-2x-3=0$，

解得：$x=3$ 或 -1，

∴ $A(-1,0)$，$B(3,0)$；

(2) 解：∵ $OP=OA=1$，

∴ $P(0,1)$，

设直线 AC 的解析式为 $y=kx+b(k\neq0)$，

把 $A(-1,0)$，$P(0,1)$ 代入，可得：$\begin{cases}-k+b=0\\b=1\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=1\\b=1\end{cases}$，

∴ 直线 AC 的解析式为 $y=x+1$，

①如图，若点 D 在 AC 的下方时，过点 B 作 AC 的平行线与抛物线的交点，即为 D_1，

∵ $BD_1 /\!/ AC$，

∴ 设直线 BD_1 的解析式为 $y=x+m$，

又 ∵ $B(3,0)$，

∴ 可得：$0=3+m$，解得：$m=-3$，

∴ 直线 BD_1 的解析式为 $y=x-3$，

∵ 直线 BD_1 与抛物线相交于点 D_1，

∴ 可得：$\begin{cases}y=x-3\\y=x^2-2x-3\end{cases}$，解得：$\begin{cases}x=3\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=0\\y=-3\end{cases}$，

∴ $D_1(0,-3)$，

∴ 点 D 的横坐标为 0；

②如图，若点 D 在 AC 的上方时，点 D_1 关于点 P 的对称点 $G(0,5)$，过点 G 作 AC 的平行线 l 交抛物线于点 D_2、D_3，D_2、D_3 符合条件，

∵ 直线 l 平行于直线 AC，

∴ 设直线 l 的解析式为 $y=x+n$，

又 ∵ $G(0,5)$，

∴ $n=5$，

∴ 直线 l 的解析式为 $y=x+5$，

又 ∵ 直线 l 与抛物线相交于点 D_2、D_3，

∴ 可得：$\begin{cases}y=x+5\\y=x^2-2x-3\end{cases}$，整理，可得：$x^2-3x-8=0$，解得：$x=\dfrac{3-\sqrt{41}}{2}$ 或 $\dfrac{3+\sqrt{41}}{2}$，

∴ D_2、D_3 的横坐标为 $\dfrac{3-\sqrt{41}}{2}$ 或 $\dfrac{3+\sqrt{41}}{2}$，

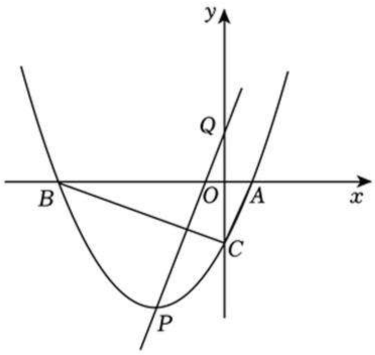
综上所述，满足条件的点 D 的横坐标为 0，$\dfrac{3-\sqrt{41}}{2}$，$\dfrac{3+\sqrt{41}}{2}$

三、等线段构造全等

3. 抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{5}{2}$ 交 x 轴于 A，B 两点 (A 在 B 的右边)，交 y 轴于点 C.

(1) 直接写出点 A，B，C 的坐标；

(2) 如图，连接 AC，BC，过第三象限的抛物线上的点 P 作直线 $PQ\parallel AC$，交 y 轴于点 Q. 若 BC 平分线段 PQ，求点 P 的坐标；



【解析】解：(1) 在 $y=\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{5}{2}$ 中，令 $x=0$ 得 $y=-\frac{5}{2}$，

$\therefore C\left(0,-\frac{5}{2}\right)$，

令 $y=0$ 得 $0=\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{5}{2}$，

解得 $x=-5$ 或 $x=1$，

$\therefore A(1,0)$，$B(-5,0)$；

(2) 设直线 AC 的解析式为 $y=kx+b(k\neq 0)$，

把 $A(,0)$，$C\left(0,-\frac{5}{2}\right)$ 代入得：$\begin{cases}k+b=0\\ b=-\frac{5}{2}\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=\frac{5}{2}\\ b=-\frac{5}{2}\end{cases}$，

$\therefore$ 直线 AC 的解析式为 $y=\frac{5}{2}x-\frac{5}{2}$，

由 $PQ\parallel AC$，设直线 PQ 的解析式为 $y=\frac{5}{2}x+b'$，

设 $P\left(t,\frac{1}{2}t^2+2t-\frac{5}{2}\right)$，

$\therefore \frac{1}{2}t^2+2t-\frac{5}{2}=\frac{5}{2}t+b'$，

$\therefore b'=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t-\frac{5}{2}$，

$\therefore$ 直线 PQ 的解析式为 $y=\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t-\frac{5}{2}$，

令 $x=0$ 得 $y=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t-\frac{5}{2}$，

$\therefore Q\left(0,\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t-\frac{5}{2}\right)$；

$\because BC$ 平分线段 PQ，

$\therefore PQ$ 的中点 $\left(\frac{t}{2},\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{4}t-\frac{5}{2}\right)$ 在直线 BC 上，

由 $B(-5,0)$，$C\left(0,-\frac{5}{2}\right)$ 得直线 BC 解析式为 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$，

$\therefore \frac{1}{2}t^2+\frac{3}{4}t-\frac{5}{2}=-\frac{t}{4}-\frac{5}{2}$，

解得 $t=-2$ 或 $t=0$(舍去)，

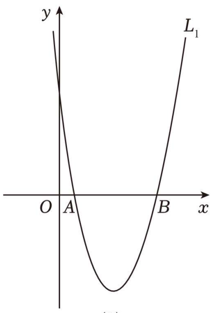
$\therefore P\left(-2,-\frac{9}{2}\right)$；

4. 如图(1),抛物线 L_1:$y=x^2-6x+c$ 与 x 轴交于 A,B 两点,且 $AB=4$. 将抛物线 L_1 向左平移 $a(a>0)$ 个单位得到抛物线 L_2,C 是抛物线 L_2 与 y 轴的交点.

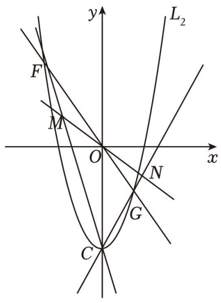
(1) 求 c 的值;

(2) 过点 C 作射线 $CD\parallel x$ 轴,交抛物线 L_1 于点 D,E 两点,点 D 在点 E 的左侧. 若 $DE=2CD$,直接写出 a 的值;

(3) 如图(2),若 C 是抛物线 L_2 的顶点,直线 $y=mx$ 与抛物线 L_2 交于 F,G 两点,直线 $y=nx$ 分别交直线 CF,CG 于点 M,N. 若 $OM=ON$,试探究 m 与 n 的数量关系.



(1)



(2)

【解析】解:(1) 当 $y=0$ 时,$x^2-6x+c=0$,

$\therefore x_A+x_B=6$,$x_A\cdot x_B=c$,

$\therefore AB=\sqrt{36-4c}=4$,解得 $c=5$;

(2) $\because c=5$,

$\therefore$ 抛物线 L_1 的解析式为 $y=x^2-6x+5$,

$\because$ 将抛物线 L_1 向左平移 $a(a>0)$ 个单位得到抛物线 L_2,

$\therefore$ 抛物线 L_2 的解析式为 $y=(x-3+a)^2-4$,

$\therefore C(0,a^2-6a+5)$,

$\because CD\parallel x$ 轴,

$\therefore D(3-\sqrt{9+a^2-6a},a^2-6a+5)$,$E(3+\sqrt{9+a^2-6a},a^2-6a+5)$,

$\therefore DE=2\sqrt{9+a^2-6a}$,$CD=3-\sqrt{9+a^2-6a}$,

$\because DE=2CD$,

$\therefore 2\sqrt{9+a^2-6a}=6-2\sqrt{9+a^2-6a}$,解得 $a=\dfrac{3}{2}$ 或 $a=\dfrac{9}{2}$;

(3) $\because C$ 是抛物线 L_2 的顶点,

$\therefore 3-a=0$,解得 $a=3$,

$\therefore$ 抛物线 L_2 的解析式为 $y=x^2-4$,

设 $F(x_F,x_F^2-4)$,$G(x_G,x_G^2-4)$,当 $x^2-4=mx$ 时,$x^2-mx-4=0$,

$\therefore x_F+x_G=m$,

直线 CF 的解析式为 $y=x_Fx-4$,直线 CG 的解析式为 $y=x_Gx-4$,

当 $x_Fx-4=nx$ 时,$M\left(\dfrac{4}{x_F-n},\dfrac{4n}{x_F-n}\right)$,当 $x_Gx-4=nx$ 时,$N\left(\dfrac{4}{x_G-n},\dfrac{4n}{x_G-n}\right)$,

$\because OM=ON$,

$\therefore x_F+x_G=2n$,

$\therefore m=2n$.

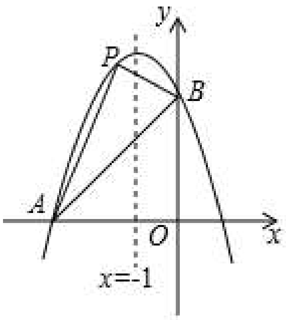
四、面积最值

5. 如图,已知抛物线经过两点 $A(-3,0)$,$B(0,3)$,且其对称轴为直线 $x=-1$.

(1) 求此抛物线的解析式;

(2) 直线 $x=m$(在 A、B 之间)交抛物线于 M 点,交直线 AB 于 N,用 m 表示线段 MN 的长.

(3) 若点 P 是抛物线上点 A 与点 B 之间的动点(不包括点 A,点 B),求 ΔPAB 的面积的最大值,并求出此时点 P 的坐标.



【解析】(1) 解：∵ 抛物线对称轴是直线 $x=-1$ 且经过点 $A(-3,0)$，

∴ 由抛物线的对称性可知：抛物线还经过点 $(1,0)$.

设抛物线的解析式为 $y=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq 0)$，即：$y=a(x-1)(x+3)$.

把 $B(0,3)$ 代入得：$3=-3a$.

∴ $a=-1$.

∴ 抛物线的解析式为：$y=-x^2-2x+3$；

(2) 解：设直线 AB 的解析式为 $y=kx+b$，

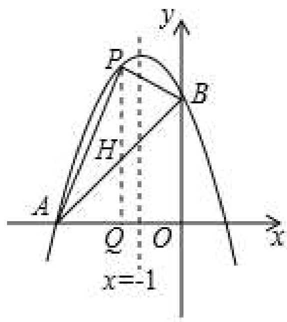
∵ $A(-3,0)$，$B(0,3)$，

∴ $\begin{cases}-3k+b=0\\ b=3\end{cases}$，

∴ 直线 AB 为 $y=x+3$，

由题意，得 $M(m,-m^2-2m+3)$，$N(m,m+3)$

∴ $MN=-m^2-2m+3-(m+3)=-m^2-3m$；



(3) 解：由 (2) 知，直线 AB 为 $y=x+3$. 作 $PH\perp x$ 轴于 Q，交直线 AB 于 H，

设 $P(x,-x^2-2x+3)$，则 $H(x,x+3)$，

∴ $PH=-x^2-2x+3-(x+3)=-x^2-3x$，

∴ $S=\frac{1}{2}(-x^2-3x)\times 3=-\frac{3}{2}\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{8}$，

当 $x=-\frac{3}{2}$ 时，$S_{最大}=\frac{27}{8}$，$y=-\left(-\frac{3}{2}\right)^2-2\times\left(-\frac{3}{2}\right)+3=\frac{15}{4}$，

∴ ΔPAB 的面积的最大值为 $\frac{27}{8}$，此时点 P 的坐标为 $\left(-\frac{3}{2},\frac{15}{4}\right)$.