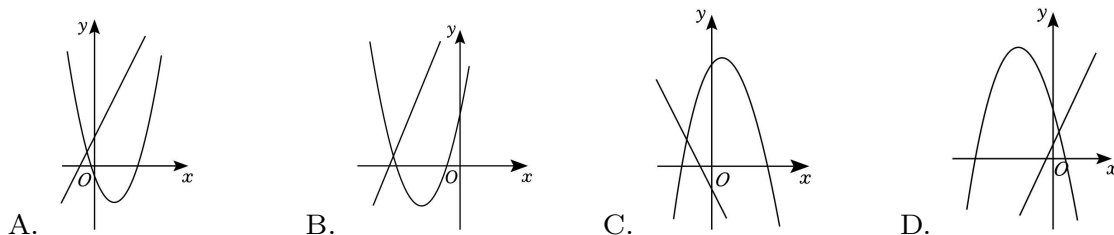


2024 秋季初三数学期中每日一练 005

1. 如图,在同一平面直角坐标系中,二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 与一次函数 $y = acx + b$ 的图象可能是 ()



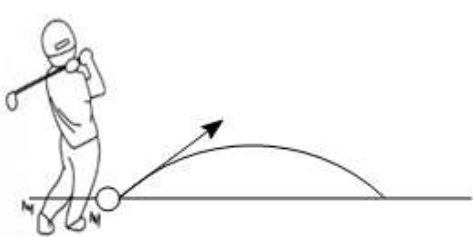
2. 如图,以 40m/s 的速度将小球沿与地面成 30° 角的方向击出时,小球的飞行路线将是一条抛物线. 如果不考虑空气阻力,小球的飞行高度 h (单位: m) 与飞行时间 t (单位: s) 之间具有函数关系 $h = 20t - 5t^2$. 下列叙述正确的是 ()

- A. 小球的飞行高度不能达到 15m B. 小球的飞行高度可以达到 25m
C. 小球从飞出到落地要用时 4s D. 小球飞出 1s 时的飞行高度为 10m

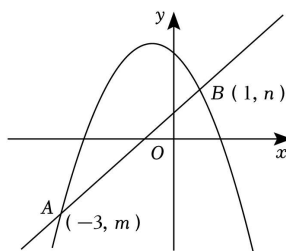
3. 已知方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的解是 $x_1 = -1, x_2 = 3$, 现给出另一个方程 $(x^2 + 1)^2 - 2(x^2 + 1) - 3 = 0$, 则它的解是 ()

- A. $x_1 = 1, x_2 = 3$ B. $x_1 = x_2 = -\sqrt{2}$ C. $x_1 = x_2 = \sqrt{2}$ D. $x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2}$

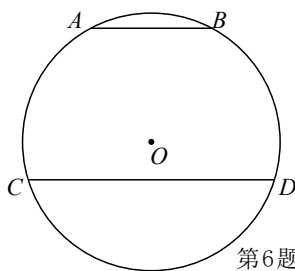
4. 二次函数 $y = x^2 - 3x - 2$ 与 x 轴交点坐标分别为 $(m, 0), (n, 0)$, 则 $m^2 + 3n - mn$ 的值是 ____.



第2题图



第5题图

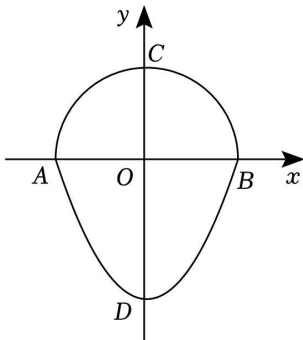


第6题图

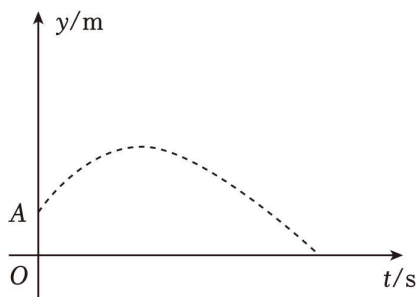
5. 如图,已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a < 0)$ 与一次函数 $y = kx + 1 (k > 0)$ 的图象交于 $A(-3, m), B(1, n)$ 两点, 则关于 x 的不等式 $ax^2 + (b - k)x + c - 1 > 0$ 的解集为 ____.

6. 如图, AB, CD 是 $\odot O$ 的两条平行弦, 且 $AB = 4, CD = 6, AB, CD$ 之间的距离为 5 , 则 $\odot O$ 的直径是 ____.

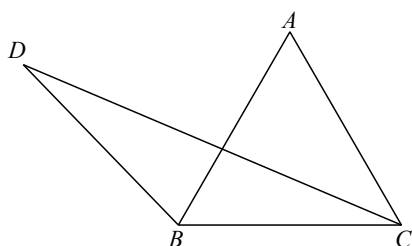
7. 如图,是一个半圆和抛物线的一部分围成的“芒果”. 已知点 A, B, C, D 分别是“芒果”与坐标轴的交点, AB 是半圆的直径, 抛物线的解析式为 $y = x^2 + b$, 若 $AB = 6$, 则图中 $CD =$ ____.



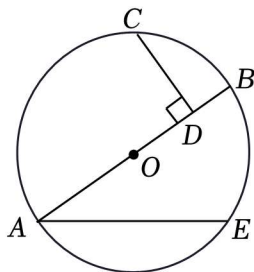
8. 如图,物体从点 A 抛出,物体的高度 y (单位: m) 与飞行时间 t (单位: s) 近似满足函数关系式 $y = -\frac{1}{5}(t - 3)^2 + 5$. 在飞行过程中,若物体在某一个高度时总对应两个不同的时间,则 t 的取值范围是 _____.



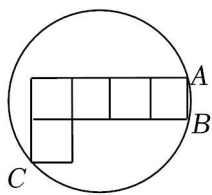
9. 如图, $\triangle ABC$ 为等边三角形,点 D 在 $\triangle ABC$ 外,连接 BD 、 CD . 若 $\angle ABD = 2\angle ACD$, $\tan \angle ACD = \frac{2\sqrt{3}}{5}$, $BD = \sqrt{37}$,则 $CD =$ _____.



10. 如图, AB 为 $\odot O$ 的直径, AE 为 $\odot O$ 的弦, C 为优弧 \widehat{ABE} 的中点, $CD \perp AB$,垂足为 D . 若 $AE = 8$, $DB = 2$,则 $\odot O$ 的半径为 _____.



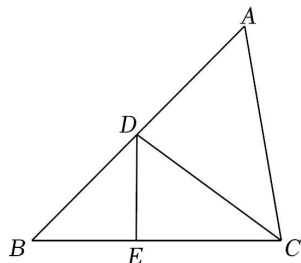
11. 如图由 5 个边长为 1 的小正方形组成的“L”形,圆 O 经过其顶点 A 、 B 、 C ,则圆 O 的半径为 _____.



12. 已知抛物线 $y = x^2 - 2x + c$ 经过 $A(n + 3, y_1)$, $B(2n - 1, y_2)$ 两点,若 A 、 B 分别位于抛物线对称轴的两侧,且 $y_1 < y_2$,则 n 的取值范围是 _____.
13. 已知点 $P(m, n)$ 在抛物线 $y = x^2 - 4x + a$ 上,当 $m \leq 1$ 时,总有 $n \geq -1$ 恒成立,则实数 a 的取值范围是 _____.

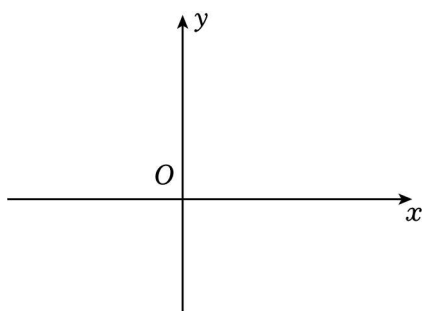
14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 45^\circ$, CD 是 AB 边上的中线, 过点 D 作 $DE \perp BC$, 垂足为点 E , 若 $CD = 5$, $\sin \angle BCD = \frac{3}{5}$.

- (1) 求 BC 的长;
(2) 求 $\angle ACB$ 的正切值.



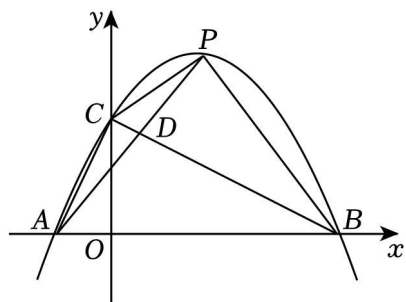
15. 已知: 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 $A(3, 0)$ 、 $B(0, -3)$, 顶点为 P .

- (1) 求抛物线的解析式及顶点 P 的坐标;
(2) 平移抛物线, 使得平移后的抛物线顶点 Q 在直线 AB 上, 且点 Q 在 y 轴右侧.
① 若点 B 平移后得到的点 C 在 x 轴上, 求此时抛物线的解析式;
② 若平移后的抛物线与 y 轴相交于点 D , 且 $\triangle BDQ$ 是直角三角形, 求此时抛物线的解析式.


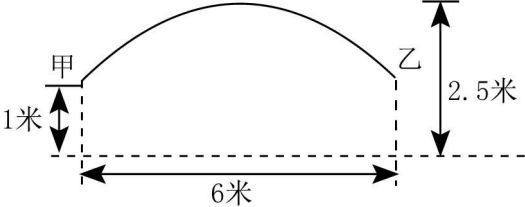


16. 如图, 抛物线 $y = -\frac{1}{4}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A , $B(8, 0)$ 两点, 与 y 轴交于点 $C(0, 4)$. 点 P 是第一象限内抛物线上的一个动点, 连接 BC .

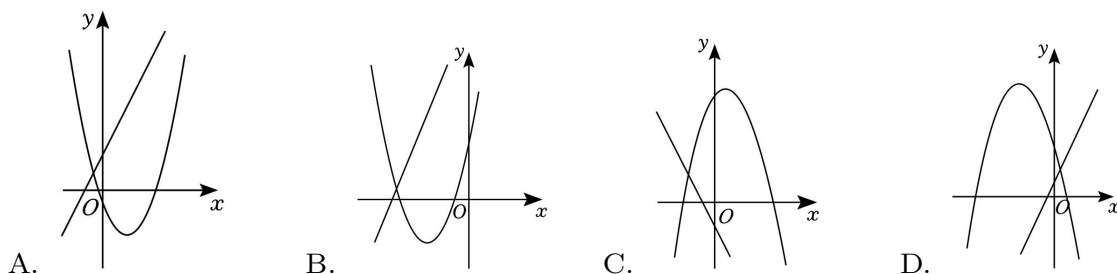
- (1) 直接写出: $b = \underline{\hspace{1cm}}$, $c = \underline{\hspace{1cm}}$;
(2) 如图, 连接 PC 、 AC 、 AP , AP 与 BC 交于点 D , 设 $\triangle PCD$ 和 $\triangle ACD$ 的面积分别为 S_1 和 S_2 , 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最大值.



17. 根据以下素材,探索完成任务.

| 如何设计跳长绳方案 | | |
|-----------|---|--|
| 素材 1 | 图 1 是集体跳长绳比赛,比赛时,各队跳绳 10 人,摇绳 2 人,共计 12 人. 图 2 是绳甩到最高处时的示意图,可以近似的看作一条抛物线,正在甩绳的甲、乙两位队员拿绳的手间距 6 米,到地面的距离均为 1 米,绳子最高点距离地面 2.5 米. |  (图1) |
| 素材 2 | 某队跳绳成员有 6 名男生和 4 名女生,男生身高 1.70 米至 1.80 米,女生身高 1.66 米至 1.68 米. 跳长绳比赛时,可以采用一路纵队或两路纵队并排的方式安排队员位置,但为了保证安全,人与人之间距离至少 0.5 米 |  (图2) |
| 问题解决 | | |
| 任务 1 | 确定长绳形状 | 在图 2 中建立合适的直角坐标系,并求出抛物线的函数表达式 |
| 任务 2 | 探究站队方式 | 当该队以一路纵队的方式跳绳时,绳子能否顺利的甩过所有队员的头顶? |
| 任务 3 | 拟定位置方案 | 为了更顺利的完成跳绳,现按中间高两边低的方式居中安排站位. 请在你所建立的坐标系中,求出左边第一位跳绳队员横坐标的最大取值范围. |

1. 如图, 在同一平面直角坐标系中, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 与一次函数 $y = acx + b$ 的图象可能是 (**B**)



【解析】解:

- A、由抛物线可知, $a > 0, b < 0, c < 0$, 则 $ac < 0$, 由直线可知, $ac > 0, b > 0$, 故本选项不合题意;
 B、由抛物线可知, $a > 0, b > 0, c > 0$, 则 $ac > 0$, 由直线可知, $ac > 0, b > 0$, 故本选项符合题意;
 C、由抛物线可知, $a < 0, b > 0, c > 0$, 则 $ac < 0$, 由直线可知, $ac < 0, b < 0$, 故本选项不合题意;
 D、由抛物线可知, $a < 0, b < 0, c > 0$, 则 $ac < 0$, 由直线可知, $ac > 0, b > 0$, 故本选项不合题意.

2. 如图, 以 40m/s 的速度将小球沿与地面成 30° 角的方向击出时, 小球的飞行路线将是一条抛物线. 如果不考虑空气阻力, 小球的飞行高度 h (单位: m) 与飞行时间 t (单位: s) 之间具有函数关系 $h = 20t - 5t^2$. 下列叙述正确的是 (**C**)

- A. 小球的飞行高度不能达到 15m B. 小球的飞行高度可以达到 25m
 C. 小球从飞出到落地要用时 4s D. 小球飞出 1s 时的飞行高度为 10m

【解析】解: A、当 $h = 15$ 时, $15 = 20t - 5t^2$,

解得: $t_1 = 1, t_2 = 3$,

故小球的飞行高度能达到 15m , 故此选项错误;

B、 $h = 20t - 5t^2 = -5(t-2)^2 + 20$,

故 $t = 2$ 时, 小球的飞行高度最大为: 20m , 故此选项错误;

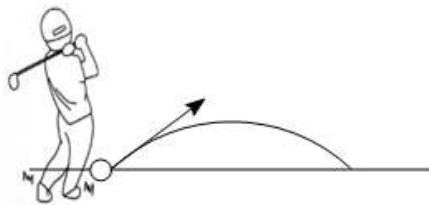
C、 $\because h = 0$ 时, $0 = 20t - 5t^2$,

解得: $t_1 = 0, t_2 = 4$,

\therefore 小球从飞出到落地要用时 4s , 故此选项正确;

D、当 $t = 1$ 时, $h = 15$,

故小球飞出 1s 时的飞行高度为 15m , 故此选项错误;



3. 已知方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的解是 $x_1 = -1, x_2 = 3$, 现给出另一个方程 $(x^2 + 1)^2 - 2(x^2 + 1) - 3 = 0$, 则它的解是 (**D**)

- A. $x_1 = 1, x_2 = 3$ B. $x_1 = x_2 = -\sqrt{2}$ C. $x_1 = x_2 = \sqrt{2}$ D. $x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2}$

【解析】解: \because 方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的解是 $x_1 = -1, x_2 = 3$,

由于另一个方程 $(x^2 + 1)^2 - 2(x^2 + 1) - 3 = 0$ 与已知方程的形式完全相同,

$\therefore x^2 + 1 = -1$ 或 $x^2 + 1 = 3$,

解得 $x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2}$.

4. 二次函数 $y = x^2 - 3x - 2$ 与 x 轴交点坐标分别为 $(m, 0), (n, 0)$, 则 $m^2 + 3n - mn$ 的值是 **13**.

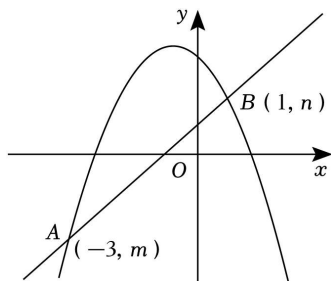
【解析】解: \because 二次函数 $y = x^2 - 3x - 2$ 与 x 轴交点坐标分别为 $(m, 0), (n, 0)$,

$\therefore m, n$ 是方程 $x^2 - 3x - 2 = 0$ 的两根, $\therefore mn = -2, m + n = 3, m^2 - 3m - 2 = 0$,

$$\therefore m^2 = 3m + 2, \therefore m^2 + 3n - mn = 3m + 2 + 3n - mn = 3(m+n) - mn + 2 = 3 \times 3 - (-2) + 2 = 13.$$

5. 如图, 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a < 0)$ 与一次函数 $y = kx + 1 (k > 0)$ 的图象交于 $A(-3, m)$, $B(1, n)$ 两点, 则关于 x 的不等式 $ax^2 + (b-k)x + c - 1 > 0$ 的解集为 $-3 < x < 1$.

【解析】解: 函数大概图象如下:



根据题意得出当 $ax^2 + bx + c > kx + 1$ 时, 则 $ax^2 + (b-k)x + c - 1 > 0$,
则从图象看, 关于 x 的不等式 $ax^2 + (b-k)x + c - 1 > 0$ 的解集为 $-3 < x < 1$.

6. 如图, AB, CD 是 $\odot O$ 的两条平行弦, 且 $AB = 4, CD = 6$, AB, CD 之间的距离为 5, 则 $\odot O$ 的直径是 $2\sqrt{13}$.

【解析】解: 作 $OM \perp AB$ 于 M , 延长 MO 交 CD 于 N , 连接 OB, OD , 设 $OM = x$,

$$\therefore MB = \frac{1}{2}AB = 2,$$

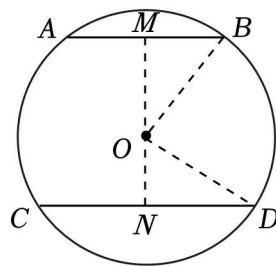
$$\because AB, CD \text{ 是两条平行弦}, \therefore ON \perp CD, \therefore DN = \frac{1}{2}CD = 3,$$

$$\because OB^2 = OM^2 + MB^2, \therefore OB^2 = x^2 + 2^2,$$

$$\because OD^2 = ON^2 + DN^2, \therefore OD^2 = (5-x)^2 + 3^2,$$

$$\because OB = OD, \therefore x^2 + 4 = (5-x)^2 + 9, \therefore x = 3,$$

$$\therefore OB^2 = 3^2 + 4 = 13, \therefore OB = \sqrt{13} \text{ (负值已舍)}, \therefore \odot O \text{ 直径长是 } 2\sqrt{13},$$



7. 如图, 是一个半圆和抛物线的一部分围成的“芒果”. 已知点 A, B, C, D 分别是“芒果”与坐标轴的交点, AB 是半圆的直径, 抛物线的解析式为 $y = x^2 + b$, 若 $AB = 6$, 则图中 $CD = 12$.

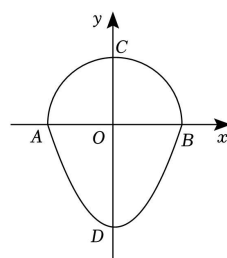
【解析】解: $\because AB = 6, AB$ 是半圆的直径, $\therefore A$ 点坐标为 $(-3, 0), B$ 点坐标为 $(3, 0)$,

将 B 点坐标代入抛物线表达式得: $3^2 + b = 0$, 解得: $b = -9$,

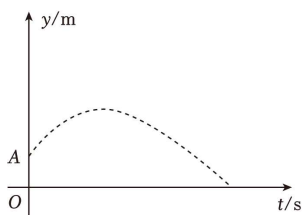
$$\therefore \text{抛物线解析式为 } y = x^2 - 9,$$

当 $x = 0$ 时, $y = -9$, 即点 $D(0, -9)$, 则 $OD = 9$,

$$\because OC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 6 = 3 \therefore CD = OC + OD = 9 + 3 = 12,$$



8. 如图, 物体从点 A 抛出, 物体的高度 y (单位: m) 与飞行时间 t (单位: s) 近似满足函数关系式 $y = -\frac{1}{5}(t - 3)^2 + 5$. 在飞行过程中, 若物体在某一个高度时总对应两个不同的时间, 则 t 的取值范围是 $0 \leq t \leq 6$ 且 $t \neq 3$.



【解析】解：当 $t=0$ 时， $y=-\frac{1}{5}(t-3)^2+5=-\frac{9}{5}+5=\frac{16}{5}$ ；

即 $OA=\frac{16}{5}(m)$ 。当 $y=\frac{16}{5}$ 时， $-\frac{1}{5}(t-3)^2+5=\frac{16}{5}$ ，

$\therefore t=0$ 或 $t=6$ ， \therefore 当 $0 \leq t \leq 6$ 且 $t \neq 3$ 时，物体在某一个高度时总对应两个不同的时间，
故答案为： $0 \leq t \leq 6$ 且 $t \neq 3$ 。

9. 如图， $\triangle ABC$ 为等边三角形，点 D 在 $\triangle ABC$ 外，连接 BD 、 CD 。若 $\angle ABD = 2\angle ACD$ ， $\tan \angle ACD = \frac{2\sqrt{3}}{5}$ ， $BD = \sqrt{37}$ ，则 $CD = \underline{11}$ 。

【解析】解：如图，连接 AD ，作 $BH \perp AD$ 于 H ，作 $DE \perp CB$ 交 CB 的延长线于 E ，作 $CM \perp DA$ 交 DA 的延长线于 M 。

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形， $\therefore \angle ABC = \angle ACB = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle DBE = 180^\circ - \angle ABD - \angle ABC$

$= 120^\circ - 2\angle ACD = 120^\circ - 2(60^\circ - \angle BCD) = 2\angle BCD$ ，

又 $\because \angle DBE = \angle BDC + \angle BCD$ ， $\therefore \angle BCD = \angle BDC$ ，

$\therefore BD = BC$ ， $\therefore BD = BA = BC = AC = \sqrt{37}$ ，

$\therefore \triangle ADC$ 的外接圆的圆心是点 B ， $\therefore \angle ADC = \frac{1}{2}\angle ABC = 30^\circ$ ，

$\because BD = BA$ ， $BH \perp AD$ ， $\therefore \angle ABH = \angle DBH$ ，

$\because \angle ABD = 2\angle ACD$ ， $\therefore \angle BDH = \angle ACD$ ，

$\therefore \tan \angle DBH = \tan \angle ACD = \frac{2\sqrt{3}}{5} = \frac{DH}{BH}$ ，

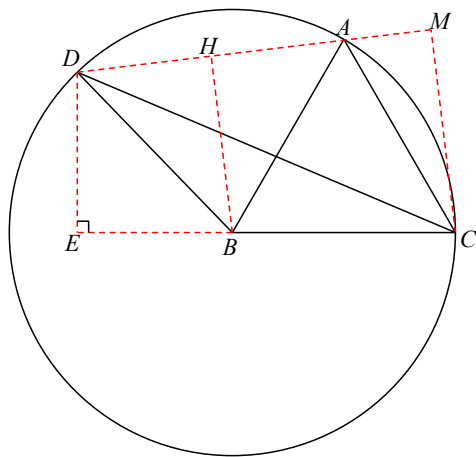
设 $DH = 2\sqrt{3}k$ ， $BH = 5k$ ， $\therefore (2\sqrt{3}k)^2 + (5k)^2 = 37$ ，

$\therefore k = 1$ 或 -1 (舍去)， $\therefore DH = AH = 2\sqrt{3}$ ，

设 $CM = x$ ，则 $DM = \sqrt{3}x$ ， $CD = 2x$ ， $\therefore AM = \sqrt{3}x - 4\sqrt{3}$ ，

在 $Rt\triangle ACM$ 中， $\therefore AC^2 = AM^2 + CM^2$ ， $\therefore 37 = (\sqrt{3}x - 4\sqrt{3})^2 + x^2$ ，

解得 $x = \frac{1}{2}$ (舍去) 或 $\frac{11}{2}$ ， $\therefore CM = \frac{11}{2}$ ， $\therefore CD = 2x = 11$ ，



10. 如图， AB 为 $\odot O$ 的直径， AE 为 $\odot O$ 的弦， C 为优弧 \widehat{ABE} 的中点， $CD \perp AB$ ，垂足为 D 。若 $AE = 8$ ， $DB = 2$ ，则 $\odot O$ 的半径为 5。

【解析】解：如图，连接 CO ，延长 CO 交 AE 于点 T 。设 $\odot O$ 的半径为 r 。

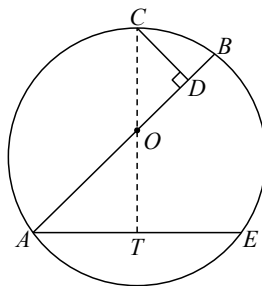
$\because \widehat{AC} = \widehat{CE}$ ， $\therefore CT \perp AE$ ， $\therefore AT = TE = \frac{1}{2}AE = 4$ ，

$\because \angle ATO = \angle CDO = 90^\circ$ ， $\angle AOT = \angle COD$ ， $AO = CO$ ，

$\therefore \triangle AOT \cong \triangle COD (AAS)$ ， $\therefore CD = AT = 4$ ，

在 $Rt\triangle COD$ 中， $OC^2 = CD^2 + OD^2$ ，

$\therefore r^2 = 4^2 + (r-2)^2$ ， $\therefore r = 5$ ， $\therefore \odot O$ 的半径为 5。



11. 如图由 5 个边长为 1 的小正方形组成的“L”形，圆 O 经过其顶点 A 、 B 、 C ，则圆 O 的半径为 $\frac{\sqrt{85}}{4}$ 。

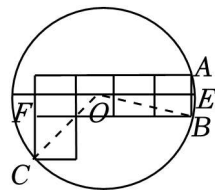
【解析】解：如图，取 AB 的中点 E ，作 $EF \perp AB$ ，连接 OB 、 OC ，

由题意知， $EF = 4$ ， $AB = 1$ ，则 $BE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}$ ， $CF = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ，

设 $OF = x$ ，则 $OE = 4 - x$ ，

$\because OC = OB$ ， $\therefore OC^2 = OB^2$ ， $\therefore OF^2 + CF^2 = OE^2 + BE^2$ ，

即 $x^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = (4-x)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$ ，解得 $x = \frac{7}{4}$ ，



$$\therefore OC = \sqrt{OF^2 + CF^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{85}}{4}, \text{即圆 } O \text{ 的半径为 } \frac{\sqrt{85}}{4},$$

12. 已知抛物线 $y = x^2 - 2x + c$ 经过 $A(n+3, y_1)$, $B(2n-1, y_2)$ 两点, 若 A 、 B 分别位于抛物线对称轴的两侧, 且 $y_1 < y_2$, 则 n 的取值范围是 $-2 < n < 0$.

【解析】解: \because 抛物线 $y = x^2 - 2x + c$ 经过 $A(n+3, y_1)$, $B(2n-1, y_2)$ 两点, A , B 分别位于抛物线对称轴的两侧,

$$\therefore \text{抛物线对称轴为 } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1, a = 1 > 0, \text{抛物线开口向上, } \therefore y_1 < y_2,$$

$\therefore A$ 点离对称轴近, B 点离对称轴远.

下面分两种情况讨论:

① 若点 A 在抛物线对称轴的左侧, 点 B 在抛物线对称轴的右侧,

$$\text{则 } \begin{cases} n+3 < 1 \\ 2n-1 > 1 \\ 1-(n+3) < (2n-1)-1 \end{cases}, \text{解得 } \begin{cases} n < -2 \\ n > 1 \\ n > 0 \end{cases}, \therefore \text{不等式组无解, } \therefore \text{该情况不存在};$$

② 若点 A 在抛物线对称轴的右侧, 点 B 在抛物线对称轴的左侧,

$$\text{则 } \begin{cases} n+3 > 1 \\ 2n-1 < 1 \\ (n+3)-1 < 1-(2n-1) \end{cases}, \text{解得 } \begin{cases} n > -2 \\ n < 1 \\ n < 0 \end{cases}, \therefore -2 < n < 0,$$

综上所述, n 的取值范围是 $-2 < n < 0$,

13. 已知点 $P(m, n)$ 在抛物线 $y = x^2 - 4x + a$ 上, 当 $m \leq 1$ 时, 总有 $n \geq -1$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 $a \geq 2$.

【解析】解: $\because y = x^2 - 4x + a = (x-2)^2 + a - 4$,

\therefore 抛物线 $y = x^2 - 4x + a$ 的开口向上, 对称轴为直线 $x = 2$,

\therefore 当 $x \leq 2$ 时, 函数 $y = x^2 - 4x + a$ 中 y 随 x 的增大而减小,

\therefore 当 $m \leq 1$ 时, 总有 $n \geq -1$ 恒成立, $\therefore 1 - 4 + a \geq -1$, 解得: $a \geq 2$.

14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 45^\circ$, CD 是 AB 边上的中线, 过点 D 作 $DE \perp BC$, 垂足为点 E , 若 $CD = 5$, $\sin \angle BCD = \frac{3}{5}$.

(1) 求 BC 的长;

(2) 求 $\angle ACB$ 的正切值.

【解析】解: (1) 设 $DE = 3x$, $DE \perp BC$,

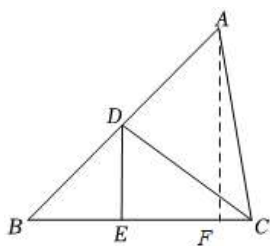
$$\because \sin \angle BCD = \frac{3}{5}, \therefore \frac{DE}{CD} = \frac{3}{5}, \therefore CD = 5x, CE = 4x,$$

$$\because CD = 5, \therefore x = 1, \therefore CE = 4, \because \angle B = 45^\circ, \therefore DE = BE = 3x, \therefore BC = BE + CE = 7x = 7.$$

(2) 过点 A 作 $AF \perp BC$ 于点 F , $\therefore DE \parallel AF$,

$\because D$ 是 AB 的中点, $\therefore DE$ 是 $\triangle ABF$ 的中位线, $\therefore AF = 2DE$, $BF = 2BE$,

由 (1) 可知: $DE = BE = 3$, $\therefore AF = 6$, $BF = 6$, $\therefore CF = BC - BF = 1$, $\therefore \tan \angle ACB = 6$.



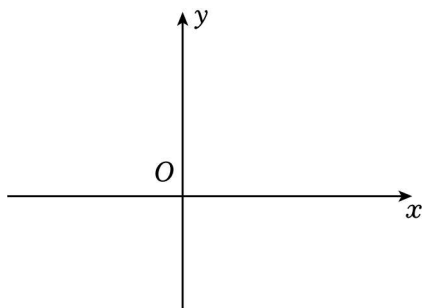
15. 已知: 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 $A(3, 0)$ 、 $B(0, -3)$, 顶点为 P .

(1) 求抛物线的解析式及顶点 P 的坐标;

(2) 平移抛物线, 使得平移后的抛物线顶点 Q 在直线 AB 上, 且点 Q 在 y 轴右侧.

①若点 B 平移后得到的点 C 在 x 轴上, 求此时抛物线的解析式;

②若平移后的抛物线与 y 轴相交于点 D , 且 $\triangle BDQ$ 是直角三角形, 求此时抛物线的解析式.



【解析】解: (1) 由题意得: $\begin{cases} 9+3b+c=0 \\ c=-3 \end{cases}$, $\therefore \begin{cases} b=-2 \\ c=-3 \end{cases}$,

故抛物线的解析式为 $y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$, \therefore 顶点 P 的坐标是 $(1, -4)$;

(2) ①设直线 AB 的解析式是 $y = mx + n$, 则 $\begin{cases} 3m+n=0 \\ n=-3 \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} m=1 \\ n=-3 \end{cases}$,

\therefore 直线 AB 的解析式是 $y = x - 3$,

设 Q 点的坐标是 $(t, t-3)$, 其中 $t > 0$, 此时抛物线的解析式是 $y = (x-t)^2 + t - 3$,

\therefore 点 B 平移后得到的点 C 在 x 轴上, \therefore 抛物线向上平移了 3 个单位,

$\therefore t-3 = -1$, 即 $t = 2$,

\therefore 此时抛物线的解析式是 $y = (x-2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 3$;

②抛物线 $y = (x-t)^2 + t - 3$ 与 y 轴的交点是 $D(0, t^2 + t - 3)$,

如果 $\angle BDQ = 90^\circ$, 即 $DQ \perp y$ 轴不合题意, 如果 $\angle BQD = 90^\circ$,

$\therefore \angle AOB = 90^\circ$, $AO = BO$, $\therefore \angle OAB = \angle OBA = 45^\circ$,

$\therefore \angle QBD = \angle BDQ = 45^\circ$, $\therefore QB = QD$,

作 $QE \perp y$ 轴于点 E , 则 $BE = DE$,

$\therefore QE = \frac{1}{2}BD$,

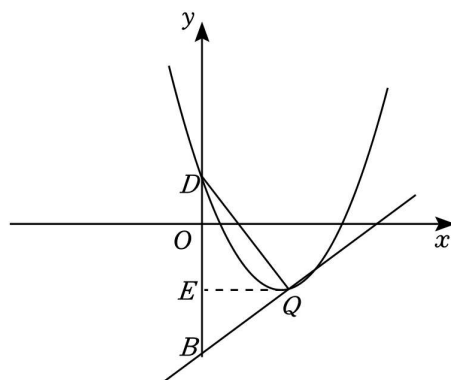
$\therefore QE = t$, $BD = t^2 + t$,

$\therefore t = \frac{1}{2}(t^2 + t)$,

解得: $t = 0$ (不合题意, 舍去) 或 1 ,

$\therefore t = 1$,

则此时抛物线的解析式是 $y = (x-1)^2 + 1 - 3 = x^2 - 2x - 1$.



16. 如图, 抛物线 $y = -\frac{1}{4}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A , $B(8, 0)$ 两点, 与 y 轴交于点 $C(0, 4)$. 点 P 是第一象限内抛物线上的一个动点, 连接 BC .

(1) 直接写出: $b = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$, $c = \underline{\underline{4}}$;

(2) 如图, 连接 PC 、 AC 、 AP , AP 与 BC 交于点 D , 设 $\triangle PCD$ 和 $\triangle ACD$ 的面积分别为 S_1 和 S_2 , 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最大值.

【解析】解：(1) 把 $B(8,0)$, $C(0,4)$ 代入得：

$$\begin{cases} -16+8b+c=0 \\ c=4 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} b=\frac{3}{2} \\ c=4 \end{cases}, \text{故答案为: } \frac{3}{2}, 4;$$

$$(2) y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4,$$

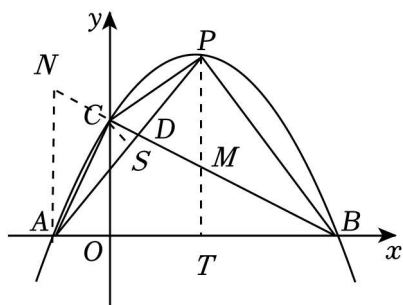
$$\text{令 } y=0, \text{ 则 } -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4 = 0, \text{ 解得: } x_1 = -2, x_2 = 8,$$

\therefore 点 $A(-2,0)$,

设直线 BC 的解析式为: $y=kx+b(k \neq 0)$, 把 $B(8,0)$, $C(0,4)$ 代入得:

$$\therefore \begin{cases} 8k+b=0 \\ b=4 \end{cases}, \begin{cases} k=-\frac{1}{2} \\ b=4 \end{cases}, \therefore y = -\frac{1}{2}x + 4,$$

如图, 过点 A 作 $AN \perp x$ 轴交 BC 于点 N , 则点 N 的横坐标为 -2 , 过点 P 作 $PT \perp x$ 轴于点 T , 交 BC 于点 M , 过点 C 作 $CS \perp AP$ 与点 E ,



$$\therefore \text{当 } x=-2 \text{ 时, } y = -\frac{1}{2}x + 4 = -\frac{1}{2} \times (-2) + 4 = 5,$$

$$\therefore N(-2,5), \text{ 则 } AN=5,$$

$$\text{设 } P(t, -\frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{2}t + 4), \text{ 且 } 0 < t < 8, \text{ 则 } M(t, -\frac{1}{2}t + 4),$$

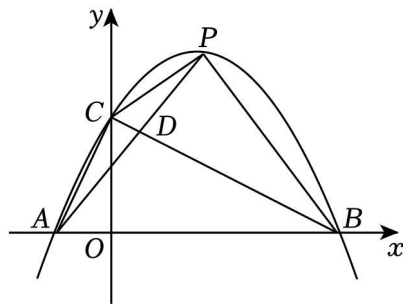
$$\therefore PM = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{2}t + 4 - (-\frac{1}{2}t + 4) = -\frac{1}{4}t^2 + 2t,$$

$$\because PM \parallel AN, \therefore \triangle PDM \sim \triangle ADN, \therefore \frac{PD}{AD} = \frac{PM}{AN}, \text{ 即 } \frac{PD}{AD} = \frac{-\frac{1}{4}t^2 + 2t}{5} = -\frac{1}{20}t^2 + \frac{2}{5}t,$$

$$\because S_{\triangle PCD} = S_1 = \frac{1}{2}PD \cdot CS, S_{\triangle ACD} = S_2 = \frac{1}{2}AD \cdot CS,$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}PD \cdot CS}{\frac{1}{2}AD \cdot CS} = \frac{PD}{AD} = -\frac{1}{20}t^2 + \frac{2}{5}t = -\frac{1}{20}(t^2 - 8t) = -\frac{1}{20}(t-4)^2 + \frac{4}{5},$$

$$\therefore \text{当 } t=4 \text{ 时, } \frac{S_1}{S_2} \text{ 有最大值, 最大值为 } \frac{4}{5}.$$



17. 根据以下素材,探索完成任务.

| 如何设计跳长绳方案 | | |
|-----------|--------|--|
| 问题解决 | | |
| 任务1 | 确定长绳形状 | 在图2中建立合适的直角坐标系,并求出抛物线的函数表达式 |
| 任务2 | 探究站队方式 | 当该队以一路纵队的方式跳绳时,绳子能否顺利的甩过所有队员的头顶? |
| 任务3 | 拟定位置方案 | 为了更顺利的完成跳绳,现按中间高两边低的方式居中安排站位. 请在你所建立的坐标系中,求出左边第一位跳绳队员横坐标的最大取值范围. |

【解析】解:任务一:

以左边摇绳人与地面的交点为原点,地面所在直线为 x 轴,建立直角坐标系,如图:

由已知可得, $(0,1)$, $(6,1)$ 在抛物线上,且抛物线顶点纵坐标为2.5,

设抛物线解析式为 $y = ax^2 + bx + c$,

$$\therefore \begin{cases} c=1 \\ 36a+6b+c=1 \\ \frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{5}{2} \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a=-\frac{1}{6} \\ b=1 \\ c=1 \end{cases},$$

\therefore 抛物线的函数表达式为 $y = -\frac{1}{6}x^2 + x + 1$;

任务二:

$$\because y = -\frac{1}{6}x^2 + x + 1 = -\frac{1}{6}(x-3)^2 + \frac{5}{2},$$

\therefore 抛物线的对称轴为直线 $x=3$,

10名同学,以直线 $x=3$ 为对称轴,分布在对称轴两侧,男同学站中间,女同学站两边,对称轴左侧的3位男同学所在位置横坐标分布是 $3 - 0.5 \times \frac{1}{2} = \frac{11}{4}$, $\frac{11}{4} - 0.5 = \frac{9}{4}$ 和 $\frac{9}{4} - 0.5 = \frac{7}{4}$,

$$\text{当 } x = \frac{7}{4} \text{ 时, } y = -\frac{1}{6} \times \left(\frac{7}{4} - 3\right)^2 + \frac{5}{2} = \frac{215}{96} \approx 2.24 > 1.8,$$

\therefore 绳子能顺利的甩过男队员的头顶,

$$\text{同理当 } x = \frac{3}{4} \text{ 时, } y = -\frac{1}{6} \times \left(\frac{3}{4} - 3\right)^2 + \frac{5}{2} = \frac{53}{32} \approx 1.656 < 1.66,$$

\therefore 绳子不能顺利的甩过女队员的头顶; \therefore 绳子不能顺利的甩过所有队员的头顶;

任务三:

$$\text{两路并排,一排5人,当 } y = 1.66 \text{ 时, } -\frac{1}{6}x^2 + x + 1 = 1.66,$$

$$\text{解得 } x = 3 + \frac{3\sqrt{14}}{5} \text{ 或 } x = 3 - \frac{3\sqrt{14}}{5}, \therefore \text{最左边的跳绳队员的横坐标不小于 } 3 - \frac{3\sqrt{14}}{5},$$

$$\text{当最右边的跳绳队员的横坐标为 } 3 + \frac{3\sqrt{14}}{5} \text{ 时,右边第二跳绳队员的横坐标为 } \frac{5}{2} + \frac{3\sqrt{14}}{5}, \text{此时他所在位置的纵坐标为 } \frac{971}{600} + \frac{3\sqrt{14}}{10} > 1.8,$$

$$\therefore \text{绳子能甩过右边第二跳绳队员的头顶,这样最左边队员的横坐标为 } 1 + \frac{3\sqrt{14}}{5};$$

$$\therefore 3 - \frac{3\sqrt{14}}{5} < x \leq 1 + \frac{3\sqrt{14}}{5}.$$

