

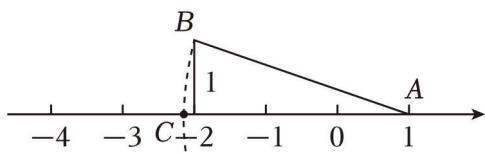
## 2024 秋季初二数学期中每日一练 005

1. 下列实数  $\frac{22}{7}$ 、 $\sqrt[3]{9}$ 、 $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 、 $\sqrt{16}$ 、2.101001000、 $\frac{\pi}{2}$  中,无理数的个数是( )

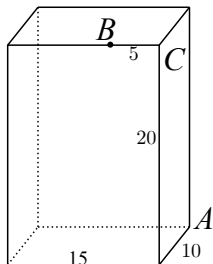
- A. 2 个                      B. 3 个                      C. 4 个                      D. 5 个

2. 如图,点  $A, C$  都是数轴上的点,  $AB = AC$ , 则数轴上点  $C$  所表示的数为( )

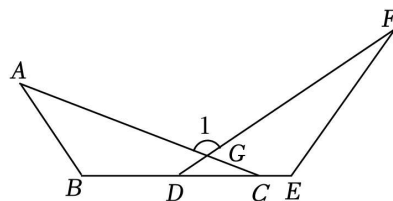
- A.  $1 - \sqrt{10}$                       B.  $-\sqrt{5}$                       C.  $-\sqrt{5} + 1$                       D.  $-\sqrt{10} - 1$



第2题图



第6题图



第8题图

3. 化简二次根式  $\sqrt{-\frac{1}{x}}$  ( $x < 0$ ), 得( )

- A.  $\frac{\sqrt{x}}{x}$                       B.  $\frac{\sqrt{-x}}{x}$                       C.  $-\frac{\sqrt{-x}}{x}$                       D.  $-\frac{\sqrt{x}}{x}$

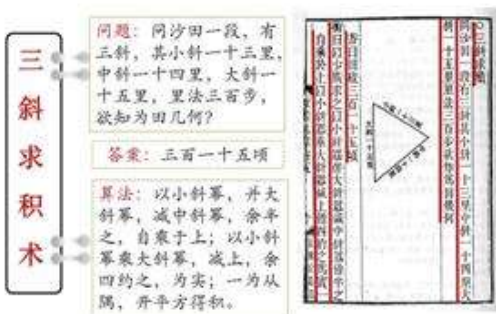
4. 若  $\sqrt{a^2 - 6a + 9} = 3 - a$ , 则  $a$  的取值范围是( )

- A.  $a \geq 3$                       B.  $a \leq 3$                       C.  $a \leq 0$                       D.  $a < 3$

5. 南宋著名数学家秦九韶的著作《数书九章》一书中,给出了“秦九韶公式”,也叫“三斜求积术”,即如果一个三角形的三边长分别为  $a, b, c$ , 则该三角形的面积为  $S = \sqrt{\frac{1}{4} \left[ a^2 b^2 - \left( \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right)^2 \right]}$ . 设  $\triangle ABC$  的三边长分别为 1, 2,  $\sqrt{5}$ , 该  $\triangle ABC$  的面积为( )



秦九韶



- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

6. 如图,长方体的长为 15, 宽为 10, 高为 20, 点  $B$  离点  $C$  的距离为 5, 一只蚂蚁如果要沿着长方体的表面从点  $A$  爬到点  $B$ , 需要爬行的最短距离是( )

- A.  $5\sqrt{21}$                       B. 25                      C.  $10\sqrt{5} + 5$                       D. 35

7. 等腰  $\triangle ABC$  中,  $\angle A = 80^\circ$ , 则  $\angle B =$  \_\_\_\_\_.

8. 如图,  $AC, DF$  相交于点  $G$ , 且  $AC = DF$ .  $D, C$  是  $BE$  上两点,  $\angle B = \angle E = \angle 1$ . 若  $BE = 1, AB = m, EF = n$ , 则  $CD$  的长为 \_\_\_\_\_.

9. 在  $Rt\triangle ABC$  中,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $AB = 3$ ,  $BC = 4$ , 过点  $B$  的直线把  $\triangle ABC$  分割成两个三角形且交线段  $AC$  于点  $P$ , 使其中只有一个是等腰三角形, 则  $AP = \underline{\hspace{2cm}}$ .

10. 计算:

(1)  $\sqrt[3]{27} - (\sqrt{3} - 1)^0 - |2 - \sqrt{3}| + \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$ ;      (2)  $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 - \left(\sqrt{27} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \div \sqrt{3}$ .

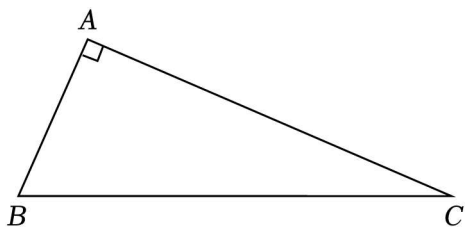
11. 若  $a = \sqrt{5} + 2$ ,  $b = \sqrt{5} - 2$ .

(1) 求  $a^2 - b^2$ .      (2) 求  $a^3b + ab^3$ .

12. 如图, 在  $Rt\triangle ABC$  中,  $\angle A = 90^\circ$ ,  $\angle C = 30^\circ$ ,  $BC = 12$ .

(1) 求作  $\angle EBC$ , 使得  $\angle EBC = 30^\circ$  且点  $E$  在  $AC$  上; (要求: 尺规作图, 不写作法, 保留作图痕迹)

(2) 过  $E$  点分别作  $EF \parallel BC$ ,  $ED \parallel AB$ , 交  $AB$ 、 $BC$  于  $F$ 、 $D$  两点, 此时恰好  $DF$  垂直平分  $BE$ , 求  $BD$  的长.



13. 我们知道, 负数没有算术平方根, 但对于三个互不相等的负整数, 若两两乘积的算术平方根都是整数, 则称这三个数为“完美组合数”. 例如:  $-1$ 、 $-4$ 、 $-9$  这三个数,  $\sqrt{(-9) \times (-4)} = 6$ ,  $\sqrt{(-9) \times (-1)} = 3$ ,  $\sqrt{(-4) \times (-1)} = 2$ , 其结果  $6$ 、 $3$ 、 $2$  都是整数, 所以  $-1$ 、 $-4$ 、 $-9$  这三个数称为“完美组合数”.

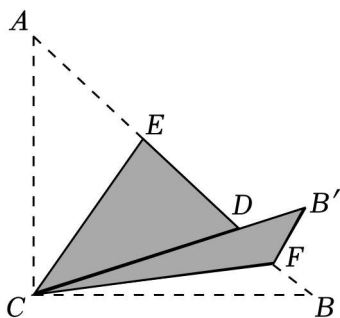
(1)  $-3$ 、 $-12$ 、 $-27$  这三个数是“完美组合数”吗? 请说明理由;

(2) 若三个数  $-5$ 、 $m$ 、 $-20$  是“完美组合数”, 其中有两个数乘积的算术平方根为  $15$ , 求  $m$  的值.

14. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ , 点  $E$ 、 $F$  在边  $AB$  上, 将边  $AC$  沿  $CE$  翻折, 使点  $A$  落在  $AB$  上的点  $D$  处, 再将边  $BC$  沿  $CF$  翻折, 使点  $B$  落在  $CD$  的延长线上的点  $B'$  处.

(1)  $\angle ECF = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ ;

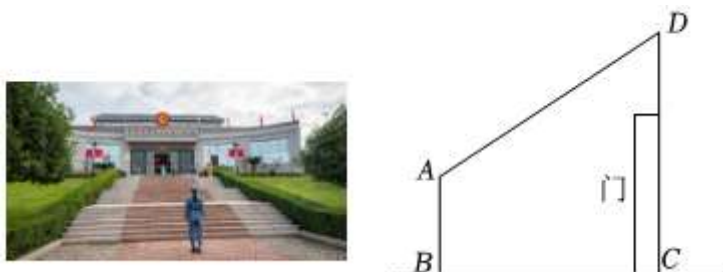
(2) 若  $CE = 4$ ,  $B'F = 1$ , 求  $\triangle CEB$  的面积.



15. 2024 盐城各中小学举办了红色主题研学活动,开启红色文化之旅. 在新四军纪念馆门口离地面一定高度的墙上  $D$  处,装有一个由传感器控制的迎宾门铃,人只要移动到该门口  $2.4m$  及  $2.4m$  以内时,门铃就会自动发出“欢迎您”的语音. 如图,一个身高  $1.8m$  的中学生刚走到  $B$  处(学生头顶在  $A$  点),门铃恰好自动响起,此时测得迎宾门铃与地面的距离和到该生头顶的距离相等.

(1) 请你计算迎宾门铃距离地面多少米?

(2) 若该生继续向前走  $1.7m$ ,此时迎宾门铃距离该生头顶多少米? (保留根号)



16. 嘉嘉根据学习“数与式”积累的活动经验,想通过“特殊到一般”的方法探究二次根式的运算规律. 下面是嘉嘉的探究过程:

等式①:  $\sqrt{1+\frac{1}{3}} = 2\sqrt{\frac{1}{3}}$ ; 等式②:  $\sqrt{2+\frac{1}{4}} = 3\sqrt{\frac{1}{4}}$ ;

等式③:  $\sqrt{3+\frac{1}{5}} = 4\sqrt{\frac{1}{5}}$ ; 等式④: \_\_\_\_.

【特例探究】(1) 将题目中的横线处补充完整;

【归纳猜想】(2) 若  $n$  为正整数,用含  $n$  的代数式表示上述运算规律,并证明此规律成立;

【应用规律】(3) 嘉嘉写出一个等式  $\sqrt{a+\frac{1}{b}} = c\sqrt{\frac{1}{b}}$  ( $a, b, c$  均为正整数),若该等式符合上述规律,则  $\sqrt{a^2+b^2-2c^2}$  的值为 \_\_\_\_.

17. 在  $\triangle ABC$  中,  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ , 设  $c$  为最长边, 当  $a^2 + b^2 = c^2$  时,  $\triangle ABC$  是直角三角形; 当  $a^2 + b^2 \neq c^2$  时, 利用代数式  $a^2 + b^2$  和  $c^2$  的大小关系, 探究  $\triangle ABC$  的形状 (按角分类).

(1) 当  $\triangle ABC$  三边分别为 6、8、9 时,  $\triangle ABC$  为\_\_\_\_三角形; 当  $\triangle ABC$  三边分别为 6、8、11 时,  $\triangle ABC$  为\_\_\_\_三角形.

(2) 猜想, 当  $a^2 + b^2$  \_\_\_\_  $c^2$  时,  $\triangle ABC$  为锐角三角形; 当  $a^2 + b^2$  \_\_\_\_  $c^2$  时,  $\triangle ABC$  为钝角三角形.

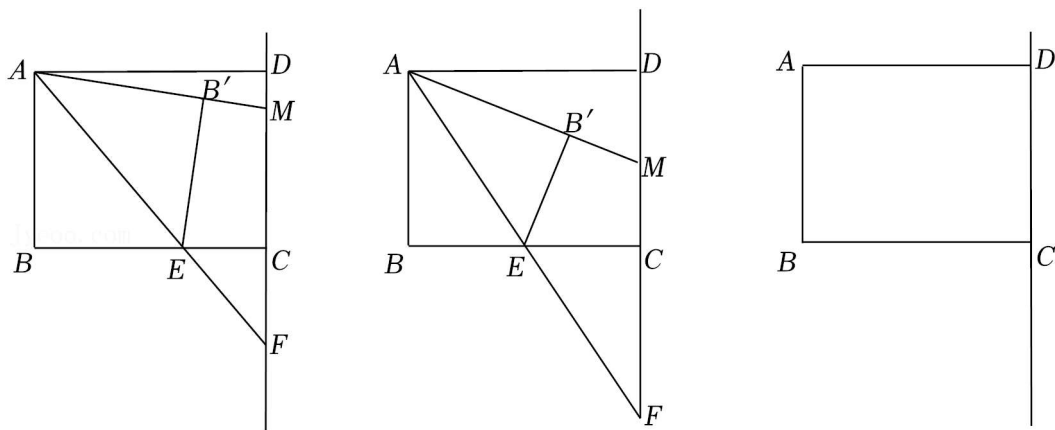
(3) 判断当  $a = 2$ ,  $b = 4$  时,  $\triangle ABC$  的形状, 并求出对应的  $c$  的取值范围.

18. 在矩形  $ABCD$  中,  $AB = 6$ ,  $BC = 8$ , 点  $E$  是射线  $BC$  上一个动点, 连接  $AE$  并延长交射线  $DC$  于点  $F$ , 将  $\triangle ABE$  沿直线  $AE$  翻折到  $\triangle AB'E$ , 延长  $AB'$  与直线  $CD$  交于点  $M$ .

(1) 求证:  $AM = MF$ ;

(2) 当点  $E$  是边  $BC$  的中点时, 求  $CM$  的长;

(3) 当  $CF = 4$  时, 求  $CM$  的长.

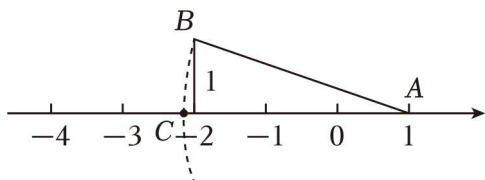


1. 下列实数  $\frac{22}{7}$ 、 $\sqrt[3]{9}$ 、 $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 、 $\sqrt{16}$ 、2.101001000、 $\frac{\pi}{2}$  中, 无理数的个数是 ( )

- A. 2 个                      B. 3 个                      C. 4 个                      D. 5 个

【解答】解:  $\sqrt{16}=4$ , 无理数有  $\sqrt[3]{9}$ ,  $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ,  $\frac{\pi}{2}$ , 共有 3 个. 故选: B.

2. 如图, 点 A, C 都是数轴上的点,  $AB=AC$ , 则数轴上点 C 所表示的数为 ( )



- A.  $1-\sqrt{10}$                       B.  $-\sqrt{5}$                       C.  $-\sqrt{5}+1$                       D.  $-\sqrt{10}-1$

【解答】解: A、B、-2 处的点构成了直角三角形,  $\therefore AB=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ ,  
 $\because AB=AC$ ,  $\therefore AC=\sqrt{10}$ ,  $\therefore C$  点所表示的数为  $-\sqrt{10}+1$ , 故选: A.

3. 化简二次根式  $\sqrt{-\frac{1}{x}}$  ( $x<0$ ), 得 ( )

- A.  $\frac{\sqrt{x}}{x}$                       B.  $\frac{\sqrt{-x}}{x}$                       C.  $-\frac{\sqrt{-x}}{x}$                       D.  $-\frac{\sqrt{x}}{x}$

【解答】解:  $\because x<0$ ,  $\therefore \sqrt{-\frac{1}{x}}=\sqrt{-\frac{x}{x^2}}=-\frac{\sqrt{-x}}{x}$ , 故选: C.

4. 若  $\sqrt{a^2-6a+9}=3-a$ , 则  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $a\geq 3$                       B.  $a\leq 3$                       C.  $a\leq 0$                       D.  $a< 3$

【解答】解:  $\sqrt{a^2-6a+9}=\sqrt{(a-3)^2}=|a-3|=3-a$ ,  $\therefore a-3\leq 0$ ,  $\therefore a\leq 3$ , 故选: B.

5. 南宋著名数学家秦九韶的著作《数书九章》一书中, 给出了“秦九韶公式”, 也叫“三斜求积术”, 即如果一个三角形的三边长分别为  $a, b, c$ , 则该三角形的面积为  $S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right]}$ . 设  $\triangle ABC$  的三边长分别为 1, 2,  $\sqrt{5}$ , 该  $\triangle ABC$  的面积为 ( )



- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

【解答】解:  $\because \triangle ABC$  的三边长分别为 1, 2,  $\sqrt{5}$ ,

将  $a=1, b=2, c=\sqrt{5}$  代入  $S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right]}$  中得,

$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[1\times 4-\left(\frac{1+4-5}{2}\right)^2\right]}=\sqrt{\frac{1}{4}\times 4}=1$ , 故选: A.

6. 如图,长方体的长为15,宽为10,高为20,点B离点C的距离为5,一只蚂蚁如果要沿着长方体的表面从点A爬到点B,需要爬行的最短距离是( )

A.  $5\sqrt{21}$

B. 25

C.  $10\sqrt{5} + 5$

D. 35

【解答】解:将长方体展开,连接A、B,根据两点之间线段最短,

(1) 如图,  $BD = 10 + 5 = 15$ ,  $AD = 20$ ,

由勾股定理得:  $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25$ .

(2) 如图,  $BC = 5$ ,  $AC = 20 + 10 = 30$ ,

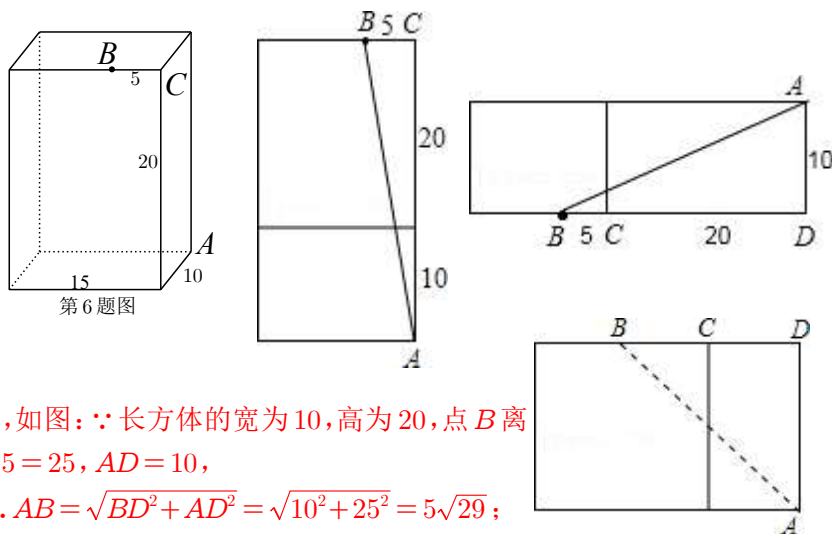
由勾股定理得,  $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + 30^2} = \sqrt{925} = 5\sqrt{37}$ .

(3) 只要把长方体的右侧表面剪开与

上面这个侧面所在的平面形成一个长方形,如图:  $\because$  长方体的宽为10,高为20,点B离点C的距离是5,  $\therefore BD = CD + BC = 20 + 5 = 25$ ,  $AD = 10$ ,

在直角三角形ABD中,根据勾股定理得:  $\therefore AB = \sqrt{BD^2 + AD^2} = \sqrt{10^2 + 25^2} = 5\sqrt{29}$ ;

由于  $25 < 5\sqrt{29} < 5\sqrt{37}$ , 故选: B.



7. 等腰 $\triangle ABC$ 中,  $\angle A = 80^\circ$ , 则  $\angle B =$   $80^\circ$  或  $50^\circ$  或  $20^\circ$ .

【解答】解: ①  $\angle A$  是顶角, 那么  $\angle B = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 80^\circ) = 50^\circ$ ; ②  $\angle A$  是底角, 且  $\angle A = \angle B$ , 那么  $\angle B = 80^\circ$ ;

③  $\angle A$  是底角, 且  $\angle A = \angle C$ , 那么  $\angle B = 180^\circ - 2 \times 80^\circ = 20^\circ$ . 故填  $80^\circ$  或  $50^\circ$  或  $20^\circ$ .

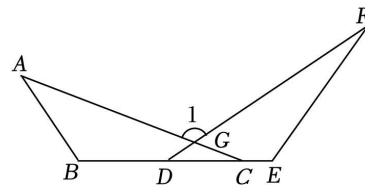
8. 如图,  $AC$ 、 $DF$  相交于点  $G$ , 且  $AC = DF$ .  $D$ 、 $C$  是  $BE$  上两点,  $\angle B = \angle E = \angle 1$ . 若  $BE = 1$ ,  $AB = m$ ,  $EF = n$ , 则  $CD$  的长为  $m + n - 1$ .

【解答】解:  $\because \angle DGC = \angle 1$ ,  $\therefore \angle ACB = 180^\circ - \angle FDE - \angle 1$ ,

$\because \angle DFE = 180^\circ - \angle FDE - \angle E$ ,  $\angle E = \angle 1$ ,  $\therefore \angle ACB = \angle DFE$ ,

在  $\triangle ACB$  和  $\triangle DFE$  中,  $\begin{cases} \angle ACB = \angle DFE \\ \angle B = \angle E \\ AC = DF \end{cases}$ ,  $\therefore \triangle ACB \cong \triangle DFE (AAS)$ ,

$\therefore DE = AB = m$ ,  $BC = EF = n$ ,  $\therefore CD = BC + DE - BE = m + n - 1$ , 故答案为:  $m + n - 1$ .



9. 在  $Rt\triangle ABC$  中,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $AB = 3$ ,  $BC = 4$ , 过点  $B$  的直线把  $\triangle ABC$  分割成两个三角形且交线段  $AC$  于点  $P$ , 使其中只有一个是等腰三角形, 则  $AP =$   $3$  或  $\frac{18}{5}$  或  $1$ .

【解答】解: 在  $Rt\triangle ABC$  中,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $AB = 3$ ,  $BC = 4$ ,

$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ,

沿过点  $B$  的直线把  $\triangle ABC$  分割成两个三角形, 使其中只有一个是等腰三角形, 有三种情况:

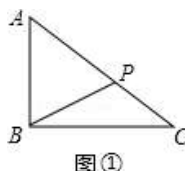
① 当  $AB = AP = 3$  时,  $\triangle ABP$  是等腰三角形,  $\triangle BCP$  不是等腰三角形, 如图①所示,

② 当  $AB = BP = 3$ , 且  $P$  在  $AC$  上时,  $\triangle ABP$  是等腰三角形,  $\triangle BCP$  不是等腰三角形, 如图②所示,

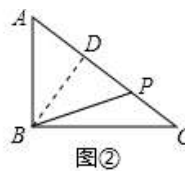
作  $\triangle ABC$  的高  $BD$ ,  $\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} AB \cdot BC$ ,  $\therefore BD = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5}$ ,

$\therefore AD = DP = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{3^2 - (\frac{12}{5})^2} = \frac{9}{5}$ ,  $\therefore AP = 2AD = \frac{18}{5}$ ,

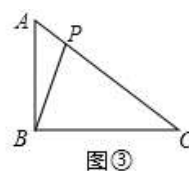
③ 当  $CB = CP = 4$ , 即  $AP = 1$  时,  $\triangle CBP$  是等腰三角形,  $\triangle ABP$  不是等腰三角形, 如图③所示,



图①



图②



图③

综上所述,  $AP=3$  或  $\frac{18}{5}$  或  $1$ . 故答案为:  $3$  或  $\frac{18}{5}$  或  $1$ .

10. 计算:

$$(1) \sqrt[3]{27} - (\sqrt{3} - 1)^0 - |2 - \sqrt{3}| + \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}; (2) (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 - \left(\sqrt{27} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \div \sqrt{3}.$$

【解答】解: (1) 原式  $= 3 - 1 - (2 - \sqrt{3}) + 5 = 3 - 1 - 2 + \sqrt{3} + 5 = 5 + \sqrt{3}$ ;

$$(2) \text{原式} = 3 - 2\sqrt{6} + 2 - \left(3 - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) = 3 - 2\sqrt{6} + 2 - 3 + \frac{\sqrt{6}}{2} = 2 - \frac{3}{2}\sqrt{6}.$$

11. 若  $a = \sqrt{5} + 2$ ,  $b = \sqrt{5} - 2$ . (1) 求  $a^2 - b^2$ . (2) 求  $a^3b + ab^3$ .

【解答】解: (1) 原式  $= (a + b)(a - b) = (\sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} + 2) = 2\sqrt{5} \times 4 = 8\sqrt{5}$ ;

(2)  $\because a = \sqrt{5} + 2, b = \sqrt{5} - 2, \therefore a + b = (\sqrt{5} + 2) + (\sqrt{5} - 2) = 2\sqrt{5}, ab = (\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2) = 1$ ,

则  $a^3b + ab^3 = ab(a^2 + b^2) = ab[(a + b)^2 - 2ab] = 1 \times [(2\sqrt{5})^2 - 2] = 18$ ;

12. 如图, 在  $Rt\triangle ABC$  中,  $\angle A = 90^\circ$ ,  $\angle C = 30^\circ$ ,  $BC = 12$ .

(1) 求作  $\angle EBC$ , 使得  $\angle EBC = 30^\circ$  且点  $E$  在  $AC$  上; (要求: 尺规作图, 不写作法, 保留作图痕迹)

(2) 过  $E$  点分别作  $EF \parallel BC$ ,  $ED \parallel AB$ , 交  $AB$ 、 $BC$  于  $F$ 、 $D$  两点, 此时恰好  $DF$  垂直平分  $BE$ , 求  $BD$  的长.

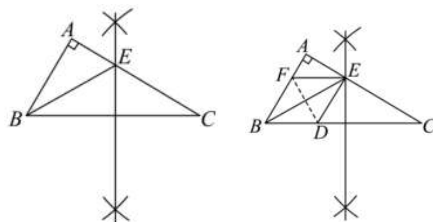
【解答】解: (1) 如图即为  $\angle EBC$ , 其中  $\angle EBC = 30^\circ$ , 且  $E$  在  $AC$  上,

(2) 如图,  $\because DF$  垂直平分  $BE, \therefore ED = BD$ ,

$\because \angle A = 90^\circ, ED \parallel AB, \therefore \angle CED = \angle A = 90^\circ$ .

$\because$  在  $Rt\triangle DEC$  中,  $\angle CED = 90^\circ, \angle C = 30^\circ, \therefore CD = 2ED = 2BD$ .

$\because BD + CD = BC$ , 即  $BD + 2BD = 12, \therefore BD = 4$ .



13. 我们知道, 负数没有算术平方根, 但对于三个互不相等的负整数,

若两两乘积的算术平方根都是整数, 则称这三个数为“完美组合数”. 例如:  $-1, -4, -9$  这三个数,

$\sqrt{(-9) \times (-4)} = 6, \sqrt{(-9) \times (-1)} = 3, \sqrt{(-4) \times (-1)} = 2$ , 其结果  $6, 3, 2$  都是整数, 所以  $-1, -4, -9$  这三个数称为“完美组合数”.

(1)  $-3, -12, -27$  这三个数是“完美组合数”吗? 请说明理由;

(2) 若三个数  $-5, m, -20$  是“完美组合数”, 其中有两个数乘积的算术平方根为  $15$ , 求  $m$  的值.

【解答】解: (1)  $\because -3, -12, -27$  三个数都为负, 且  $\sqrt{-3 \times (-12)} = 6, \sqrt{-3 \times (-27)} = 9, \sqrt{-12 \times (-27)} = 18$ ,  $\therefore -3, -12, -27$  这三个数是“完美组合数”;

(2) 由于三个数  $-5, m, -20$  是“完美组合数”, 其中有两个数乘积的算术平方根为  $15$ ,

所以当  $-5, m$  这两个数乘积的算术平方根为  $15$  时, 则  $\sqrt{-5m} = 15$ , 解得  $m = -45$ ;

当  $m, -20$  这两个数乘积的算术平方根为  $15$ , 则  $\sqrt{-20m} = 15$ ,

解得  $m = -112.5$  (不是整数, 舍去), 综上所述,  $m = -45$ .

14. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ , 点  $E, F$  在边  $AB$  上, 将边  $AC$  沿  $CE$  翻折, 使点  $A$  落在  $AB$  上的点  $D$  处, 再将边  $BC$  沿  $CF$  翻折, 使点  $B$  落在  $CD$  的延长线上的点  $B'$  处.

(1)  $\angle ECF =$  45  $^\circ$ ;

(2) 若  $CE = 4, B'F = 1$ , 求  $\triangle CEB$  的面积.

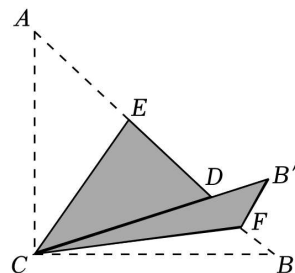
【解答】解: (1) 由折叠可得,  $\angle ACE = \angle DCE = \frac{1}{2} \angle ACD$ ,

$$\angle BCF = \angle B'CF = \frac{1}{2} \angle BCB',$$

又  $\because \angle ACB = 90^\circ, \therefore \angle ACD + \angle BCB' = 90^\circ$

$$\therefore \angle ECD + \angle FCD = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ, \text{即 } \angle ECF = 45^\circ;$$

(2) 由折叠, 得  $\angle DEC = \angle AEC = 90^\circ, BF = B'F = 1. \therefore \angle EFC = 45^\circ = \angle ECF. \therefore CE = EF = 4$ .

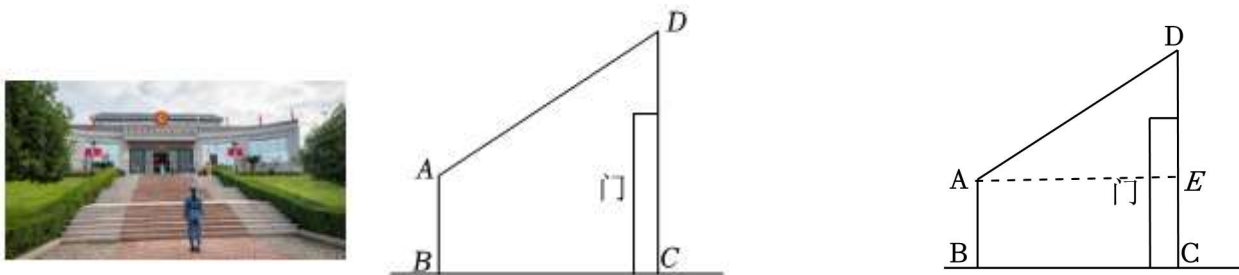


$$\therefore BE = 4 + 1 = 5. \therefore S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2} BE \times CE = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10.$$

15. 2024 盐城各中小学举办了红色主题研学活动, 开启红色文化之旅. 在新四军纪念馆门口离地面一定高度的墙上  $D$  处, 装有一个由传感器控制的迎宾门铃, 人只要移动到该门口  $2.4m$  及  $2.4m$  以内时, 门铃就会自动发出“欢迎您”的语音. 如图, 一个身高  $1.8m$  的中学生刚走到  $B$  处 (学生头顶在  $A$  点), 门铃恰好自动响起, 此时测得迎宾门铃与地面的距离和到该生头顶的距离相等.

(1) 请你计算迎宾门铃距离地面多少米?

(2) 若该生继续向前走  $1.7m$ , 此时迎宾门铃距离该生头顶多少米? (保留根号)



【解答】解: (1)  $AD = CD$ ,  $BC = 2.4m$ ,  $AB = 1.8m$ ,  $\angle ABC = \angle DCB = 90^\circ$ ,

过点  $A$  作  $AE \perp CD$  于点  $E$ , 如图 1,

则  $CE = AB = 1.8m$ ,  $AE = BC = 2.4m$ ,

设迎宾门铃距离地面  $x m$ , 则  $AD = CD = x m$ ,  $DE = (x - 1.8)m$ ,

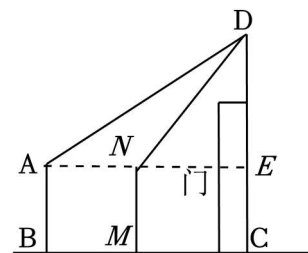
$\therefore AE^2 + DE^2 = AD^2$ , 即  $2.4^2 + (x - 1.8)^2 = x^2$ ,  $\therefore x = 2.5$ .

答: 迎宾门铃距离地面  $2.5m$ ;

(2)  $MN$  为该生向前走  $1.7m$  后的位置, 如图 2, 则  $AN = 1.7m$ ,

$\therefore NE = AE - AN = 2.4 - 1.7 = 0.7m$ , 由 (1) 可知,  $DE = 2.5 - 1.8 = 0.7m$ ,

$\therefore DN = \sqrt{NE^2 + DE^2} = \sqrt{0.7^2 + 0.7^2} = \frac{7\sqrt{2}}{10}m$ , 答: 此时迎宾门铃距离该生头顶  $\frac{7\sqrt{2}}{10}m$ .



16. 嘉嘉根据学习“数与式”积累的活动经验, 想通过“特殊到一般”的方法探究二次根式的运算规律. 下面是嘉嘉的探究过程:

等式①:  $\sqrt{1 + \frac{1}{3}} = 2\sqrt{\frac{1}{3}}$ ; 等式②:  $\sqrt{2 + \frac{1}{4}} = 3\sqrt{\frac{1}{4}}$ ;

等式③:  $\sqrt{3 + \frac{1}{5}} = 4\sqrt{\frac{1}{5}}$ ; 等式④:  $\sqrt{4 + \frac{1}{6}} = 5\sqrt{\frac{1}{6}}$  ...

【特例探究】(1) 将题目中的横线处补充完整;

【归纳猜想】(2) 若  $n$  为正整数, 用含  $n$  的代数式表示上述运算规律, 并证明此规律成立;

【应用规律】(3) 嘉嘉写出一个等式  $\sqrt{a + \frac{1}{b}} = c\sqrt{\frac{1}{b}}$  ( $a, b, c$  均为正整数), 若该等式符合上述规律, 则  $\sqrt{a^2 + b^2 - 2c^2}$  的值为 \_\_\_\_.

【解答】解: (1) 根据前 3 个得, 等式④:  $\sqrt{4 + \frac{1}{6}} = 5\sqrt{\frac{1}{6}}$ ; 故答案为:  $\sqrt{4 + \frac{1}{6}} = 5\sqrt{\frac{1}{6}}$ ;

(2) 根据规律, 用含  $n$  的式子表示为:  $\sqrt{n + \frac{1}{n+2}} = (n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}}$ ,

证明: 等式左边  $= \sqrt{\frac{n^2 + 2n + 1}{n+2}} = \sqrt{\frac{(n+1)^2}{n+2}} = (n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}} =$  右边;

(3)  $\therefore \sqrt{a + \frac{1}{b}} = c\sqrt{\frac{1}{b}}$  ( $a, b, c$  均为正整数),  $\therefore b = a + 2, c = a + 1$ ,

$\therefore \sqrt{a^2 + b^2 - 2c^2} = \sqrt{a^2 + (a+2)^2 - 2(a+1)^2}$   
 $= \sqrt{2}$ ;

故答案为： $\sqrt{2}$ 。

17. 在  $\triangle ABC$  中,  $BC=a$ ,  $AC=b$ ,  $AB=c$ , 设  $c$  为最长边, 当  $a^2+b^2=c^2$  时,  $\triangle ABC$  是直角三角形; 当  $a^2+b^2 \neq c^2$  时, 利用代数式  $a^2+b^2$  和  $c^2$  的大小关系, 探究  $\triangle ABC$  的形状 (按角分类)。

(1) 当  $\triangle ABC$  三边分别为 6、8、9 时,  $\triangle ABC$  为 锐角 三角形; 当  $\triangle ABC$  三边分别为 6、8、11 时,  $\triangle ABC$  为 钝角 三角形。

(2) 猜想, 当  $a^2+b^2$        $c^2$  时,  $\triangle ABC$  为锐角三角形; 当  $a^2+b^2$        $c^2$  时,  $\triangle ABC$  为钝角三角形。

(3) 判断当  $a=2$ ,  $b=4$  时,  $\triangle ABC$  的形状, 并求出对应的  $c$  的取值范围。

**【解答】解:** (1) 两直角边分别为 6、8 时, 斜边  $=\sqrt{6^2+8^2}=10$ ,

$\therefore \triangle ABC$  三边分别为 6、8、9 时,  $\triangle ABC$  为锐角三角形;

当  $\triangle ABC$  三边分别为 6、8、11 时,  $\triangle ABC$  为钝角三角形; 故答案为: 锐角; 钝角;

(2) 当  $a^2+b^2 > c^2$  时,  $\triangle ABC$  为锐角三角形;

当  $a^2+b^2 < c^2$  时,  $\triangle ABC$  为钝角三角形; 故答案为:  $>$ ;  $<$ ;

(3)  $\because c$  为最长边,  $2+4=6$ ,  $\therefore 4 \leq c < 6$ ,  $a^2+b^2=2^2+4^2=20$ ,

①  $a^2+b^2 > c^2$ , 即  $c^2 < 20$ ,  $0 < c < 2\sqrt{5}$ ,  $\therefore$  当  $4 \leq c < 2\sqrt{5}$  时, 这个三角形是锐角三角形;

②  $a^2+b^2 = c^2$ , 即  $c^2 = 20$ ,  $c = 2\sqrt{5}$ ,  $\therefore$  当  $c = 2\sqrt{5}$  时, 这个三角形是直角三角形;

③  $a^2+b^2 < c^2$ , 即  $c^2 > 20$ ,  $c > 2\sqrt{5}$ ,  $\therefore$  当  $2\sqrt{5} < c < 6$  时, 这个三角形是钝角三角形。

18. 在矩形  $ABCD$  中,  $AB=6$ ,  $BC=8$ , 点  $E$  是射线  $BC$  上一个动点, 连接  $AE$  并延长交射线  $DC$  于点  $F$ , 将  $\triangle ABE$  沿直线  $AE$  翻折到  $\triangle AB'E$ , 延长  $AB'$  与直线  $CD$  交于点  $M$ 。

(1) 求证:  $AM=MF$ ;

(2) 当点  $E$  是边  $BC$  的中点时, 求  $CM$  的长;

(3) 当  $CF=4$  时, 求  $CM$  的长。

**【解答】(1)** 证明:  $\because$  四边形  $ABCD$  是矩形,

$\therefore AB \parallel CD$ ,  $\therefore \angle F = \angle BAF$ ,

由折叠性质可得:  $\angle BAF = \angle MAF$ ,

$\therefore \angle F = \angle MAF$ ,  $\therefore AM = MF$ ,

(2)  $\because$  点  $E$  是边  $BC$  的中点,  $\therefore BE = CE = \frac{1}{2}BC = 4$ ,

$\because$  四边形  $ABCD$  是矩形,  $BC=8$ ,  $\therefore AB \parallel CD$ ,  $\angle B = \angle BCD = \angle ADC = 90^\circ$ ,  $AD = BC = 8$ ,

$\therefore \angle F = \angle BAF$ ,  $\because \angle AEB = \angle FEC$ ,  $\therefore \triangle AEB \cong \triangle FEC (AAS)$ ,  $\therefore AB = CF = 6$ ,

设  $CM = x$ ,  $\therefore AM = MF = x + 6$ ,  $DM = 6 - x$ ,

在  $Rt\triangle ADM$  中,  $AM^2 = AD^2 + DM^2$ ,  $\therefore (x+6)^2 = 8^2 + (6-x)^2$ , 解得:  $x = \frac{8}{3}$ ,  $\therefore CM$  的长为  $\frac{8}{3}$ ;

(3) 当  $CF=4$  时, 设  $CM = x$ , 应分为两种情况:

第一种情况, 如图, 点  $E$  在线段  $BC$  上,

$\therefore AM = MF = x + 4$ ,  $DM = 6 - x$ ,

在  $Rt\triangle ADM$  中,  $AM^2 = AD^2 + DM^2$ ,

$\therefore (x+4)^2 = 8^2 + (6-x)^2$ ,

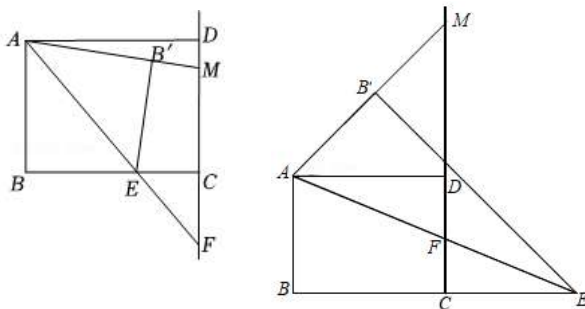
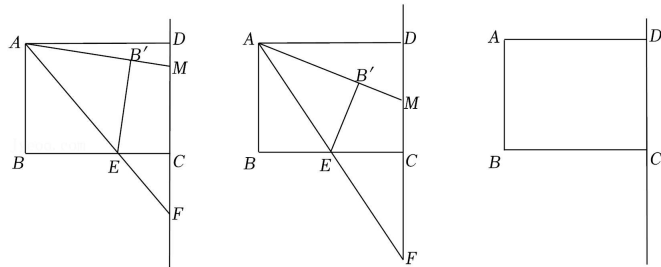
解得:  $x = \frac{21}{5}$ ,  $\therefore CM$  的长为  $\frac{21}{5}$ ;

第二种情况, 如图, 点  $E$  在线段  $BC$  的延长线上,

$\therefore AM = MF = x - 4$ ,  $DM = x - 6$ ,

在  $Rt\triangle ADM$  中,  $AM^2 = AD^2 + DM^2$ ,

$\therefore (x-4)^2 = 8^2 + (x-6)^2$ , 解得:  $x = 21$ ,  $\therefore CM$  的长为 21;



综上,当  $CF=4$  时,  $CM$  的长为  $\frac{21}{5}$  或 21.