

2025 春季初二数学每日一题打卡 001

001 试题来源：2024 春无锡新吴区校级月考第 26 题

我们知道平行四边形有很多性质．如果我们把平行四边形沿着它的一条对角线翻折，那么会发现这其中还有更多的结论．

发现与证明：在 $\square ABCD$ 中， $AB \neq BC$ ，将 $\triangle ABC$ 沿 AC 翻折至 $\triangle AB'C$ ，连接 $B'D$ ．

结论 1: $B'D \parallel AC$ ；

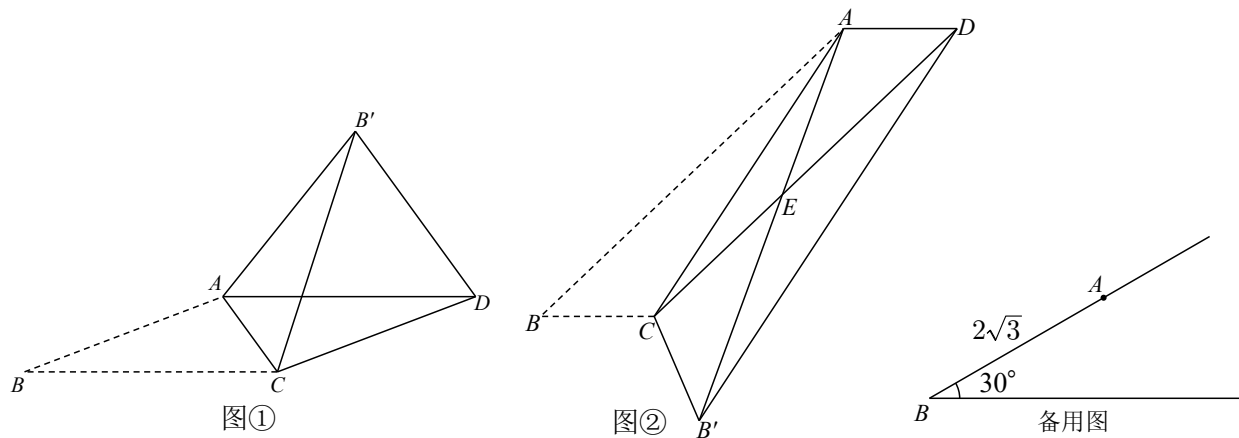
结论 2: $\triangle AB'C$ 与 $\square ABCD$ 重叠部分的图形是等腰三角形．

.....

请利用图①证明结论 1 或结论 2(只需证明一个结论)．

应用与探究：

在 $\square ABCD$ 中，已知 $\angle B = 30^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 沿 AC 翻折至 $\triangle AB'C$ ，连接 $B'D$ ．



- (1) 如图①，若 $AB = \sqrt{3}$ ， $\angle AB'D = 75^\circ$ ，则 $\angle ACB = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ ， $BC = \underline{\hspace{2cm}}$ ；
- (2) 如图②， $AB = 2\sqrt{3}$ ， $BC = 1$ ， AB' 与边 CD 相交于点 E ，求 $\triangle AEC$ 的面积；
- (3) 已知 $AB = 2\sqrt{3}$ ，当 BC 长为多少时， $\triangle B'AD$ 是直角三角形？

试题解析

请利用图①证明结论1或结论2(只需证明一个结论).

解:【发现与证明】

结论2:在 $\square ABCD$ 中, $AB \neq BC$, 将 $\triangle ABC$ 沿 AC 翻折至 $\triangle AB'C$, 连接 $B'D$.

如图1, \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore AB=CD, BC=AD, \angle B=\angle ADC$,

\therefore 将 $\triangle ABC$ 沿 AC 翻折至 $\triangle AB'C$, $\therefore AB'=AB, B'C=BC, \angle AB'C=\angle B$,

$\therefore AB'=CD, B'C=AD, \angle AB'C=\angle ADC$,

在 $\triangle AB'C$ 和 $\triangle CAD$ 中, $\begin{cases} AB'=CD \\ \angle AB'C=\angle ADC, \therefore \triangle AB'C \cong \triangle CAD(SAS), \therefore \angle ACB'=\angle CAD, \\ B'C=AD \end{cases}$

设 $AD, B'C$ 相交于 E , $\therefore AE=CE$, $\therefore \triangle ACE$ 是等腰三角形,

即 $\triangle AB'C$ 与 $\square ABCD$ 重叠部分的图形是等腰三角形;

结论1: $\because B'C=AD, AE=CE, \therefore B'E=DE, \therefore \angle CB'D=\angle ADB'$,

$\therefore \angle AEC=\angle B'ED, \angle ACB'=\angle CAD, \therefore \angle ADB'=\angle DAC, \therefore B'D \parallel AC$;

应用与探究:

在 $\square ABCD$ 中, 已知 $\angle B=30^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 沿 AC 翻折至 $\triangle AB'C$, 连接 $B'D$.

(1) 如图①, 若 $AB=\sqrt{3}, \angle AB'D=75^\circ$, 则 $\angle ACB=$ 45 $^\circ$, $BC=$ $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$;

(1) 如图①, \because 在 $\square ABCD$ 中, $\angle B=30^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 沿 AC 翻折至 $\triangle AB'C$, $\therefore \angle AB'C=30^\circ$,

$\therefore \angle AB'D=75^\circ, \therefore \angle CB'D=45^\circ, \therefore B'D \parallel AC, \therefore \angle ACB'=\angle CB'D=45^\circ$,

$\therefore \angle ACB=\angle ACB', \therefore \angle ACB=45^\circ$; 作 $AG \perp BC$ 于 $G, \therefore AG=CG$,

$\because \angle B=30^\circ, \therefore AG=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2} \times \sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore CG=\frac{\sqrt{3}}{2}, BG=\sqrt{AB^2-AG^2}=\frac{3}{2},$

$\therefore BC=BG+CG=\frac{3+\sqrt{3}}{2},$

(2) 如图②, $AB=2\sqrt{3}, BC=1, AB'$ 与边 CD 相交于点 E , 求 $\triangle AEC$ 的面积;

(2) 如图②, 作 $CG \perp AB'$ 于 G ,

$\because \angle B=30^\circ, \therefore \angle AB'C=30^\circ,$

$\therefore CG=\frac{1}{2}B'C=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}, B'G=\frac{\sqrt{3}}{2}B'C=\frac{\sqrt{3}}{2}BC=\frac{\sqrt{3}}{2},$

$\because AB'=AB=2\sqrt{3}, \therefore AG=2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2},$

设 $AE=CE=x$, 则 $EG=\frac{3\sqrt{3}}{2}-x,$

$\because CG^2+EG^2=CE^2, \therefore \left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-x\right)^2=x^2, \text{解得 } x=\frac{7\sqrt{3}}{9},$

$\therefore AE=\frac{7\sqrt{3}}{9},$

$\therefore \triangle AEC \text{ 的面积}=\frac{1}{2}AE \cdot CG=\frac{1}{2} \times \frac{7\sqrt{3}}{9} \times \frac{1}{2}=\frac{7\sqrt{3}}{36};$

(3) 已知 $AB=2\sqrt{3}$, 当 BC 长为多少时, $\triangle B'AD$ 是直角三角形?

(3) 如图②, $\because AD=BC, BC=B'C, \therefore AD=B'C,$

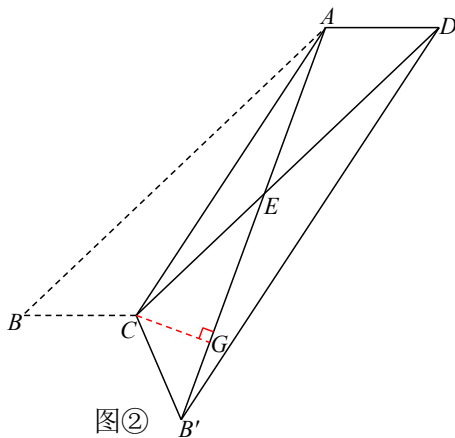
$\because AC \parallel B'D, \therefore$ 四边形 $ACB'D$ 是等腰梯形, $\because \angle B=30^\circ, \therefore \angle AB'C=\angle CDA=30^\circ,$

$\therefore \triangle AB'D$ 是直角三角形,

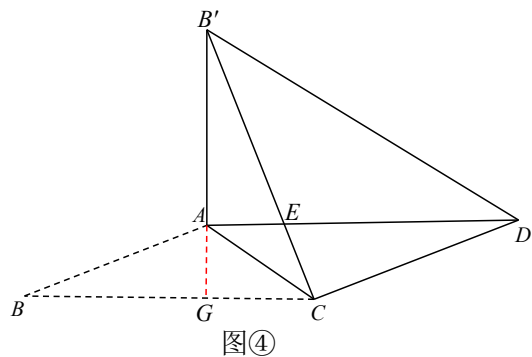
当 $\angle B'AD=90^\circ, AB > BC$ 时, 设 $\angle ADB'=\angle CB'D=y,$

$\therefore \angle AB'D=y-30^\circ, \therefore \angle AB'D+\angle ADB'=90^\circ, \therefore y-30^\circ+y=90^\circ, \text{解得 } y=60^\circ,$

$\therefore \angle AB'D=y-30^\circ=30^\circ, \therefore AB'=AB=2\sqrt{3}, \therefore AD=\frac{\sqrt{3}}{3} \times 2\sqrt{3}=2, \therefore BC=2,$



当 $\angle B'AD = 90^\circ$, $AB < BC$ 时, 如图④,



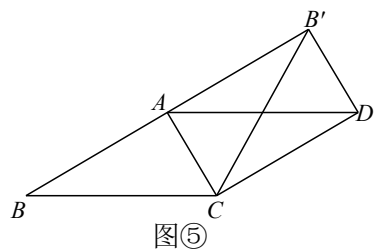
$\because AD = BC, BC = B'C, \therefore AD = B'C,$

$\because AC \parallel B'D, \angle B'AD = 90^\circ, \therefore \angle B'GC = 90^\circ,$

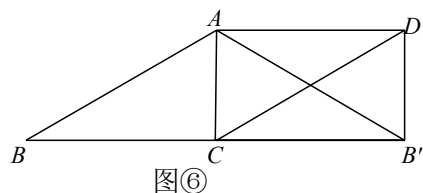
$\because \angle B = 30^\circ, AB = 2\sqrt{3}, \therefore \angle AB'C = 30^\circ, \therefore GC = \frac{1}{2} B'C = \frac{1}{2} BC, \therefore G$ 是 BC 的中点,

在 $Rt\triangle ABG$ 中, $BG = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = 3, \therefore BC = 6.$

如图⑤中, 当 $\angle AB'D = 90^\circ$ 时, $BC = 2\sqrt{3} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = 4.$



如图⑥中, 当 $\angle ADB' = 90^\circ$ 时, $BC = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = 3,$



综上所述, 当 BC 的长为 2 或 6 或 4 或 3 时, $\triangle AB'D$ 是直角三角形.