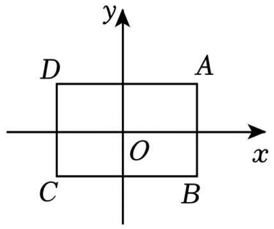
进一数学初三数学每日一练(2.24)

参考答案与解析

1. 若点 $P(x,y)$ 满足 $x+y=k$，则称点 P 具有性质 $H(K)$．例如点 $Q(3,4)$ 具有性质 $H(7)$．如图，在长方形 $ABCD$ 中点 $A(3,2)$，点 $C(-3,-2)$，$AB\perp x$ 轴，$CB\perp y$ 轴．长方形 $ABCD$ 边上存在两点 M，N 均具有性质 $H(-2)$，则线段 MN 长为　　(　　)

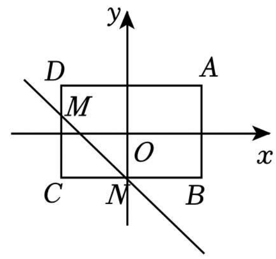


A. 3　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $3\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{13}$

【解析】解：由题意可得 $x+y=-2$，

$\therefore y=-x-2$，

则点 M、N 为直线 $y=-x-2$ 与长方形 $ABCD$ 边的交点，如图所示，



$\therefore x_M=-3$，$y_N=-2$，

代入 $y=-x-2$ 得，$y_M=1$，$x_N=0$，

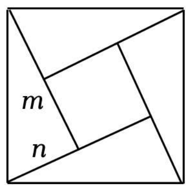
$\therefore M(-3,1)$，$N(0,-2)$，

$\therefore CM=3$，$CN=3$，

$\therefore MN=\sqrt{CM^2+CN^2}=3\sqrt{2}$；

故选：C．

2. “赵爽弦图”巧妙利用面积关系证明了勾股定理．如图所示的“赵爽弦图”是由四个全等直角三角形和中间的小正方形拼成的一个大正方形．设直角三角形的两条直角边长分别为 m，$n(m>n)$．若小正方形面积为 5，$(m+n)^2=21$，则大正方形面积为　　(　　)



A. 12　　B. 13　　C. 14　　D. 15

【解析】解：由题意可知，中间小正方形的边长为 $m-n$，

$\therefore (m-n)^2=5$，即 $m^2+n^2-2mn=5$ ①，

$\because (m+n)^2=21$，

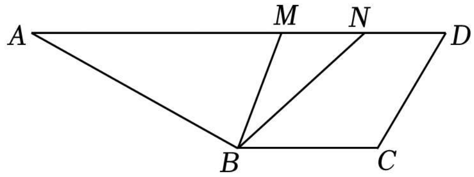
$\therefore m^2+n^2+2mn=21$ ②，

① + ②得 $2(m^2+n^2)=26$，

$\therefore$ 大正方形的面积为：$m^2+n^2=13$，

故选：B．

3. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$\angle DAB=30^\circ$，$\angle ADC=60^\circ$，$BC=CD=2$，若线段 MN 在边 AD 上运动，且 $MN=1$，则 BM^2+2BN^2 的最小值是　　(　　)



A. $\dfrac{13}{2}$　　B. $\dfrac{29}{3}$　　C. $\dfrac{39}{4}$　　D. 10

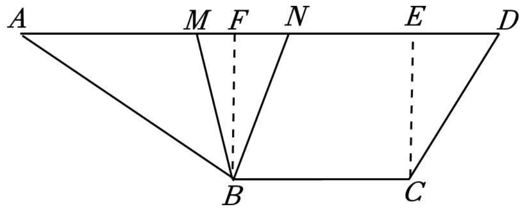
【解析】解:过B作$BF\perp AD$于F,过C作$CE\perp AD$于E,

$\because \angle D=60^\circ, CD=2$,

$\therefore CE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}CD=\sqrt{3}$,

$\because AD\parallel BC$,

$\therefore BF=CE=\sqrt{3}$,



要使BM^2+2BN^2的值最小,则BM和BN越小越好,

$\therefore MN$显然在点B的上方(中间位置时),

设$MF=x$, $FN=1-x$,

$\therefore BM^2+2BN^2=BF^2+FM^2+2(BF^2+FN^2)$

$=x^2+3+2[(1-x)^2+3]=3x^2-4x+11=3\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{29}{3}$,

$\therefore$当$x=\dfrac{2}{3}$时,BM^2+2BN^2的最小值是$\dfrac{29}{3}$.

故选:B.

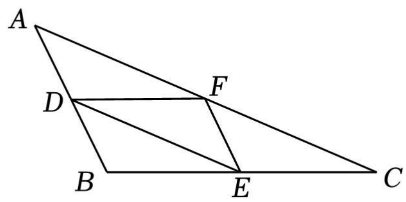
4. 在ΔABC中,$AB=4$,$BC=6$,$AC=8$,D,E,F分别是AB,BC,AC的中点,则ΔDEF的周长为__9__.

【解析】解:$\because AB=4$,$BC=6$,$AC=8$,D,E,F分别是AB,BC,AC的中点,

$\therefore DE=\dfrac{1}{2}AC=4, EF=\dfrac{1}{2}AB=2, DF=\dfrac{1}{2}BC=3$,

$\therefore \Delta DEF$的周长$=DE+EF+DF=4+2+3=9$,

故答案为:9.



5. 勾股数是指能成为直角三角形三条边长的三个正整数,世界上第一次给出勾股数公式的是中国古代数学著作《九章算术》.现有勾股数a,b,c,其中a,b均小于c,$a=\dfrac{1}{2}m^2-\dfrac{1}{2}$,$c=\dfrac{1}{2}m^2+\dfrac{1}{2}$,$m$是大于1的奇数,则$b=$______ m ______(用含m的式子表示).

【解析】解:$\because a$,b,c是勾股数,其中a,b均小于c,$a=\dfrac{1}{2}m^2-\dfrac{1}{2}$,$c=\dfrac{1}{2}m^2+\dfrac{1}{2}$,

$\therefore b^2=c^2-a^2$

$=\left(\dfrac{1}{2}m^2+\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}m^2-\dfrac{1}{2}\right)^2$

$=\dfrac{1}{4}m^4+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}m^2-\left(\dfrac{1}{4}m^4+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}m^2\right)$

$=\dfrac{1}{4}m^4+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}m^2-\dfrac{1}{4}m^4-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}m^2$

$=m^2$,

$\because m$是大于1的奇数,

$\therefore b=m$.

故答案为:m.

6. 如图,$\angle BAC=90^\circ$,$AB=AC=3\sqrt{2}$,过点C作$CD\perp BC$,延长CB到E,使$BE=\dfrac{1}{3}CD$,连接AE,ED.若$ED=2AE$,则$BE=$__$1+\sqrt{7}$__.(结果保留根号)

【解析】解:如图,过E作$EQ\perp CA$于点Q,

设$BE=x$, $AE=y$,

$\because BE=\dfrac{1}{3}CD$, $ED=2AE$,

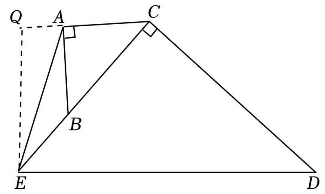
$\therefore CD=3x$, $DE=2y$,

$\because \angle BAC=90^\circ$，$AB=AC=3\sqrt{2}$，

$\therefore BC=\sqrt{2}AB=6$，$CE=6+x$，$\Delta CQE$为等腰直角三角形，

$\therefore QE=CQ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}CE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(6+x)=3\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$，

$\therefore AQ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$，



由勾股定理可得：$\begin{cases}(2y)^2=(6+x)^2+(3x)^2\\ y^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2+\left(3\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2\end{cases}$，

整理得：$x^2-2x-6=0$，

解得：$x=1\pm\sqrt{7}$，

经检验$x=1-\sqrt{7}$不符合题意；

$\therefore BE=x=1+\sqrt{7}$；

故答案为：$1+\sqrt{7}$.

7. 我们规定：三角形任意两边的“极化值”等于第三边上的中线和这边一半的平方差．如图1，在ΔABC中，AO是BC边上的中线，AB与AC的“极化值”就等于AO^2-BO^2的值，可记为$AB\Delta AC=AO^2-BO^2$.

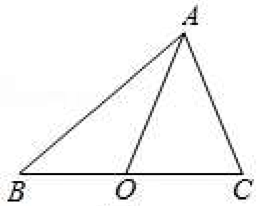


图1

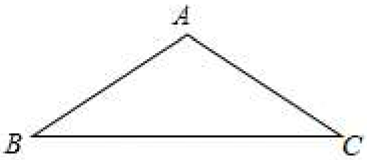


图2

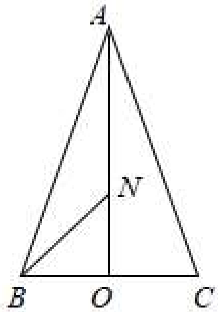


图3

(1) 在图1中，若$\angle BAC=90^\circ$，$AB=8$，$AC=6$，AO是BC边上的中线，则$AB\Delta AC=$ __0__，$OC\Delta OA=$ ______；

(2) 如图2，在ΔABC中，$AB=AC=4$，$\angle BAC=120^\circ$，求$AB\Delta AC$、$BA\Delta BC$的值；

(3) 如图3，在ΔABC中，$AB=AC$，AO是BC边上的中线，点N在AO上，且$ON=\dfrac{1}{3}AO$．已知$AB\Delta AC=14$，$BN\Delta BA=10$，求ΔABC的面积.

【解析】解：①$\because \angle BAC=90^\circ$，$AB=8$，$AC=6$，

$\therefore BC=10$，

$\because$点O是BC的中点，

$\therefore OA=OB=OC=\dfrac{1}{2}BC=5$，

$\therefore AB\Delta AC=AO^2-BO^2=25-25=0$，

②如图1，取AC的中点D，连接OD，

$\therefore CD=\dfrac{1}{2}AC=3$，

$\because OA=OC=5$，

$\therefore OD\perp AC$，

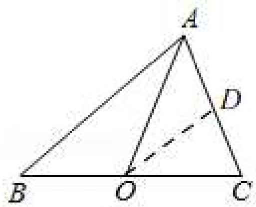


图1

在$Rt\Delta COD$中，$OD=\sqrt{OC^2-CD^2}=4$，

$\therefore OC\Delta OA=OD^2-CD^2=16-9=7$，

故答案为0，7；

(2) ①如图2，取BC的中点O，连接AO，

$\because AB=AC$，

$\therefore AO\perp BC$，

在ΔABC中，$AB=AC$，$\angle BAC=120^\circ$，

$\therefore \angle ABC=30^{\circ}$，

在 $Rt\Delta AOB$ 中，$AB=4$，$\angle ABC=30^{\circ}$，

$\therefore AO=2$，$OB=2\sqrt{3}$，

$\therefore AB\triangle AC=AO^2-BO^2=4-12=-8$，

②取 AC 的中点 D，连接 BD，

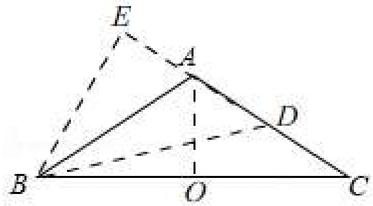


图2

$\therefore AD=CD=\frac{1}{2}AC=2$，

过点 B 作 $BE\perp AC$ 交 CA 的延长线于 E，

在 $Rt\Delta ABE$ 中，$\angle BAE=180^{\circ}-\angle BAC=60^{\circ}$，

$\therefore \angle ABE=30^{\circ}$，

$\because AB=4$，

$\therefore AE=2$，$BE=2\sqrt{3}$，

$\therefore DE=AD+AE=4$，

在 $Rt\Delta BED$ 中，根据勾股定理得，$BD=\sqrt{BE^2+DE^2}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$，

$\therefore BA\triangle BC=BD^2-CD^2=24$；

(3) 如图3，

设 $ON=x$，$OB=OC=y$，

$\therefore BC=2y$，$OA=3x$，

$\because AB\triangle AC=14$，

$\therefore OA^2-OB^2=14$，

$\therefore 9x^2-y^2=14$①，

取 AN 的中点 F，连接 BF，

$\therefore AF=FN=\frac{1}{2}AN=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}OA=ON=x$，

$\therefore OF=ON+FN=2x$，

在 $Rt\Delta BOF$ 中，$BF^2=OB^2+OF^2=y^2+4x^2$，

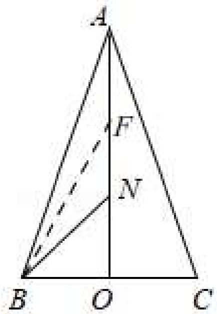


图3

$\because BN\triangle BA=10$，

$\therefore BF^2-FN^2=10$，

$\therefore y^2+4x^2-x^2=10$，

$\therefore 3x^2+y^2=10$②

联立①②得，$\begin{cases}x=\sqrt{2}\\y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\sqrt{2}\\y=-2\end{cases}$(舍)，

$\therefore BC=4$，$OA=3\sqrt{2}$，

$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BC\times AO=6\sqrt{2}$.