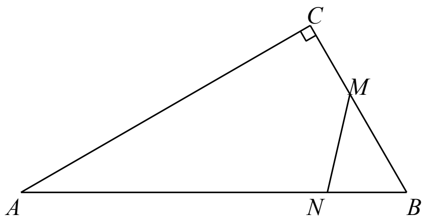
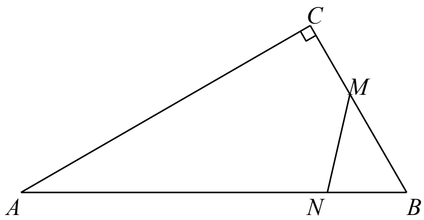
2025春季初三数学每日一题打卡002

002试题来源：2024春南京玄武区二模第16题

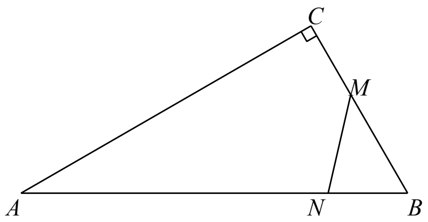
如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，$\angle B=60^\circ$，$AB=2$，M、N分别是BC、AB边上的动点，且$CM=BN$，则线段MN的最小值为______.





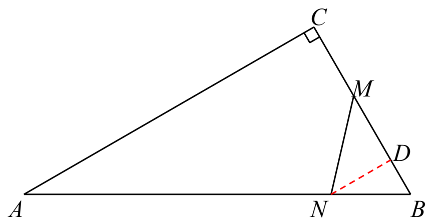
试题解析

如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，$\angle B=60^\circ$，$AB=2$，M、N分别是BC、AB边上的动点，且$CM=BN$，则线段MN的最小值为__ $\frac{1}{2}$ __.



解法一：代数法：

过点N作$ND\perp BC$于点D，



$\because \angle C=90^\circ$，$\angle B=60^\circ$，$AB=2$，

$\therefore BC=1$，

设$CM=BN=x$，

$\therefore BD=\frac{1}{2}x$，$ND=\frac{\sqrt{3}}{2}x$，

$\therefore MD=1-x-\frac{1}{2}x=1-\frac{3}{2}x$，

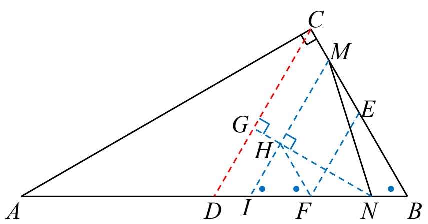
$\because MN^2=ND^2+MD^2$，

$\therefore MN^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2+\left(1-\frac{3}{2}x\right)^2=\frac{3}{4}x^2+1-3x+\frac{9}{4}x^2=3x^2-3x+1=3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$，

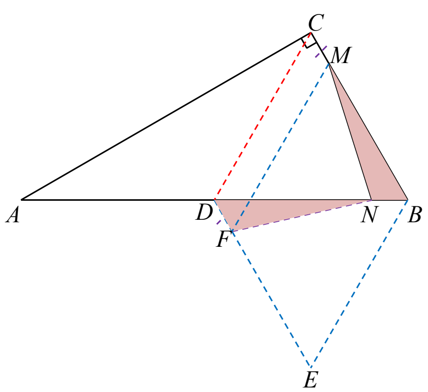
$\therefore$ 当$x=\frac{1}{2}$时，MN^2取得最小值$\frac{1}{4}$，

$\therefore MN$的最小值为$\frac{1}{2}$，

解法二：$MN\geqslant EF=\frac{1}{2}CD$，简要证法如图，证四边形$HMEF$是平四.



解法三：构造平行四边形



如图所示，四边形$CDFM$以及四边形$CBED$均为平四，

$\triangle NDF\cong\triangle MBN$，可得$NF=MN$，

在$\triangle NMF$中，利用三角形三边关系可得$NF+MN>MF$，

当M、N、F三点共线时，$NF+MN=MF$，即$2MN=MF=CD$，

即MN最小值为$\frac{1}{2}$.