

2024 秋季初一数学每日一题打卡 002

002 试题来源：2023 春南京秦淮区期中第 26 题

我们曾借助学习“图形的判定”获得的经验与方法对“平行四边形的判定”进行过探究.

【知识回顾】

如图, 四边形 $ABCD$ 中, 我们用符号语言表示出所有的 8 个边、角、对角线的数量关系:

① $AB = CD$;	② $AD = BC$;	③ $AB \parallel CD$;	④ $AD \parallel BC$;
⑤ $\angle BAD = \angle BCD$;	⑥ $\angle ABC = \angle ADC$;	⑦ $OA = OC$;	⑧ $OB = OD$.

我们曾任意选择 2 个作为条件来探索四边形是否为平行四边形.

(1) 请选择上面 8 个条件中的 2 个, 写出一个除了课本上平行四边形的定义及 3 条判定定理外可以判定四边形为平行四边形的方法: _____ . (请用文字语言表述)

【数学思考】

若将①②组合可以得到新的数量关系⑨: $AB + AD = CD + CB$; ⑦⑧组合可以得到新的数量关系⑩: $OA + OD = OB + OC$. 那么它们是否可以再加一个条件来判定平行四边形呢?

(2) 若选择④和⑨则可判定四边形是平行四边形.

如图 1, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB + AD = CD + CB$.

求证: 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

(3) 请在①~⑥中选择一个条件和⑩也可判定四边形是平行四边形, 并证明.

如图 2, 在四边形 $ABCD$ 中, AC 、 BD 相交于点 O , _____, $OA + OD = OB + OC$.

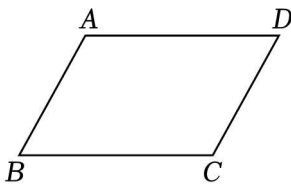


图1

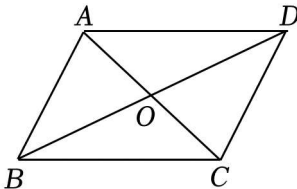
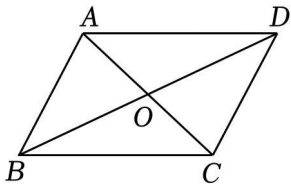


图2

求证: 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.



试题解析

(1) 请选择上面8个条件中的2个, 写出一个除了课本上平行四边形的定义及3条判定定理外可以判定四边形为平行四边形的方法: 一组对角相等, 且一组对边平行的四边形是平行四边形. (请用文字语言表述)(答案不唯一)

(1) 一组对角相等, 且一组对边平行的四边形是平行四边形.

已知: 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle B = \angle D$, 求证: 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

证明: $\because AD \parallel BC, \therefore \angle A + \angle B = 180^\circ$,

$\because \angle B = \angle D, \therefore \angle A + \angle D = 180^\circ, \therefore AB \parallel CD, \therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

故答案为: 一组对角相等, 且一组对边平行的四边形是平行四边形. (答案不唯一)

两组对角相等的四边形是平行四边形亦可.

【数学思考】

若将①②组合可以得到新的数量关系⑨: $AB + AD = CD + CB$; ⑦⑧组合可以得到新的数量关系⑩: $OA + OD = OB + OC$. 那么它们是否可以再加一个条件来判定平行四边形呢?

(2) 若选择④和⑨则可判定四边形是平行四边形.

如图1, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB + AD = CD + CB$.

求证: 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

(2) 证明: 延长 DA 、 BC 并截取 $AM = AB$, $CD = CN$.

$\because AB + AD = CD + CB, \therefore AM + AD = CN + CB$, 即 $MD = BN$.

$\because AD \parallel BC, \therefore$ 四边形 $MBND$ 是平行四边形. $\therefore MB = DN, \angle M = \angle N$.

$\because AM = AB, CD = CN, \therefore \angle M = \angle MBA, \angle N = \angle NDC. \therefore \angle MBA = \angle NDC. \therefore \triangle AMB \cong \triangle CND$.

$\therefore AB = CD. \because AB + AD = CD + CB, \therefore AD = CB. \therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

(3) 请在①~⑥中选择一个条件和⑩也可判定四边形是平行四边形, 并证明.

如图2, 在四边形 $ABCD$ 中, AC 、 BD 相交于点 O , ①或③或④, $OA + OD = OB + OC$.

求证: 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

(3) 解: 选择①或③或④之一

法1: ① $AB = DC$,

分别在 OB 、 OD 上截取 $OE = OA$ 、 $OF = OC$. 延长 AE 、 CF , 过点 B 、 D 作 $BG \perp AE$ 、 $DH \perp CF$, 垂足为点 G 、 H .

$\because OE = OA, OF = OC. \therefore \angle OAE = \angle AEO, \angle OFC = \angle OCF$.

$\because \angle AOE = \angle FOC, \therefore \angle OAE = \angle AEO = \angle OFC = \angle OCF. \therefore \angle BEG = \angle HFD$.

$\because OA + OD = OB + OC, \therefore OE + OD = OB + OF$, 即 $ED = BF. \therefore ED - EF = BF - EF$ 即 $BE = DF$.

$\therefore Rt\triangle BEG \cong Rt\triangle DFH. \therefore BG = HD$. 又 $\because AB = DC, \therefore Rt\triangle ABG \cong Rt\triangle CDH$.

$\therefore \angle BAE = \angle DCF$. 又 $\because \angle OAE = \angle OCF$,

$\therefore \angle BAE + \angle OAE = \angle DCF + \angle OCF$. 即 $\angle BAO = \angle DCO. \therefore AB \parallel DC$,

又 $\because AB = DC, \therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

法2: ③ $AB \parallel DC$, 分别在 OB 、 OD 上截取 $OE = OA$ 、 $OF = OC$.

$\because OE = OA, OF = OC. \therefore \angle OAE = \angle AEO, \angle OFC = \angle OCF$.

$\because \angle AOE = \angle FOC, \therefore \angle OAE = \angle AEO = \angle OFC = \angle OCF$.

$\therefore \angle AEB = \angle DFC. \because AB \parallel DC, \therefore \angle ABE = \angle CDF$.

$\because OA + OD = OB + OC, \therefore OE + OD = OB + OF$, 即 $ED = BF$.

$\therefore ED - EF = BF - EF$ 即 $BE = DF. \therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF. \therefore AB = DC$.

又 $\because AB \parallel DC, \therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

法3: ④ $AD \parallel BC$, 方法同③.

