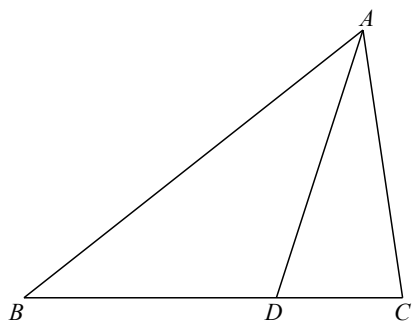


2025 春季初三数学每日一题打卡 003

003 试题来源：2024 春南京建邺区一模

如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 60^\circ$, 点 D 是 BC 边上一点, 且 $BD = 2CD$, $AD = 2$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为_____.



试题解析

如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=60^\circ$,点 D 是 BC 边上一点,且 $BD=2CD$, $AD=2$,则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

【解答】解:延长 AD 到 E ,使 $DE=\frac{1}{2}AD=1$,连接 CE ,

$$\because BD=2CD,$$

$$\therefore \frac{CD}{BD} = \frac{DE}{AD} = \frac{1}{2}$$

$$\text{又 } \angle EDC = \angle ADB,$$

$$\therefore \triangle EDC \sim \triangle ADB,$$

$$\therefore \angle E = \angle BAD, S_{\triangle ABD} = 4S_{\triangle EDC},$$

$$\therefore AB \parallel CE,$$

$$\text{设 } S_{\triangle EDC} = x,$$

$$\because DE = \frac{1}{2}AD,$$

$$\therefore S_{\triangle ADC} = 2S_{\triangle EDC} = 2x,$$

$$\text{又 } S_{\triangle ABD} = 4S_{\triangle EDC} = 4x,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ACE}, (\text{要求 } S_{\triangle ABC}, \text{ 即求 } S_{\triangle ACE})$$

$$\because AB \parallel CE,$$

$$\therefore \angle ABE = 180^\circ - \angle BAC = 120^\circ, \text{ 又 } AE = AD + DE = 3, (\text{定弦定角求面积最大值})$$

$$\therefore \text{作 } \triangle ACE \text{ 的外接圆, 设圆心为 } O,$$

当 $\triangle ACE$ 是等腰三角形时, AE 边上的高最大,则 $S_{\triangle ACE}$ 最大,此时

$$(S_{\triangle ACE})_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4}, (\text{确定定弦定角后的过程省略, 只作图示})$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 面积的最大值为 } \frac{1}{2} S_{\triangle AB'E} = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{故答案为: } \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

