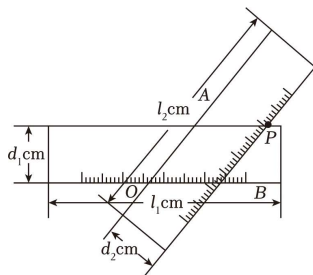


# 高数见林初三数学每日一练(2.25)

## 参考答案与解析

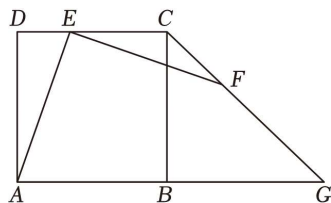
1. 如图,在纸上画有  $\angle AOB$ ,将两把直尺按图示摆放,直尺边缘的交点  $P$  在  $\angle AOB$  的平分线上,则 ( )



- A.  $d_1$  与  $d_2$  一定相等      B.  $d_1$  与  $d_2$  一定不相等      C.  $l_1$  与  $l_2$  一定相等      D.  $l_1$  与  $l_2$  一定不相等

【解析】解:根据角平分线上的点到角两边的距离相等可知:当点  $P$  在  $\angle AOB$  的平分线上时,  $d_1$  与  $d_2$  一定相等,故选: A.

2. 如图,在正方形  $ABCD$  的边  $CD$  上有一点  $E$ ,连接  $AE$ ,把  $AE$  绕点  $E$  逆时针旋转  $90^\circ$ ,得到  $FE$ ,连接  $CF$  并延长与  $AB$  的延长线交于点  $G$ . 则  $\frac{FG}{CE}$  的值为 ( )



- A.  $\sqrt{2}$       B.  $\sqrt{3}$       C.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$       D.  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

【解析】解:过点  $F$  作  $FH \perp DC$  交  $DC$  延长线于点  $H$ ,

$$\therefore \angle H = 90^\circ$$

$\because$  四边形  $ABCD$  是正方形,

$$\therefore \angle D = 90^\circ, AD = DC,$$

$\because$   $AE$  绕点  $E$  逆时针旋转  $90^\circ$ ,得到  $FE$ ,

$$\therefore AE = FE, \angle AEF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE + \angle AED = 90^\circ, \angle HEF + \angle AED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle HEF,$$

$$\text{在 } \triangle ADE \text{ 和 } \triangle EHF \text{ 中, } \begin{cases} \angle D = \angle H \\ \angle DAE = \angle HEF \\ AE = EF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle EHF (\text{AAS}),$$

$$\therefore AD = EH, DE = HF,$$

$$\therefore EH = DC,$$

$$\therefore DE = CH = HF,$$

$$\therefore \angle HCF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle G = 45^\circ,$$

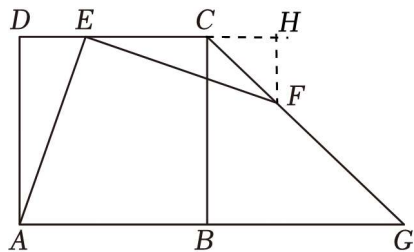
设  $CH = HF = DE = x$ , 正方形边长为  $y$ ,

$$\text{则 } CE = y - x, CF = \sqrt{2}x, CG = \sqrt{2}y,$$

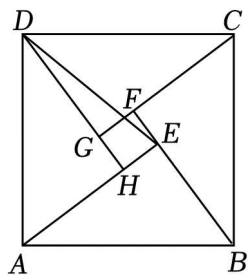
$$\therefore FG = CG - CF = \sqrt{2}y - \sqrt{2}x,$$

$$\therefore \frac{FG}{CE} = \sqrt{2},$$

故选: A.



3. 如图, 正方形  $ABCD$  由四个全等的直角三角形 ( $\triangle ABE$ ,  $\triangle BCF$ ,  $\triangle CDG$ ,  $\triangle DAH$ ) 和中间一个小正方形  $EFGH$  组成, 连接  $DE$ . 若  $AE=4$ ,  $BE=3$ , 则  $DE=$  ( )



- A. 5                      B.  $2\sqrt{6}$                       C.  $\sqrt{17}$                       D. 4

【解析】解:  $\because Rt\triangle DAH \cong Rt\triangle ABE$ ,  
 $\therefore DH=AE=4$ ,  $AH=BE=3$ ,  
 $\therefore EH=AE-AH=4-3=1$ ,  
 $\because$  四边形  $EFGH$  是正方形,  
 $\therefore \angle DHE=90^\circ$ ,  
 $\therefore DE=\sqrt{DH^2+EH^2}=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$ ,  
 故选: C.

4. 在等边  $\triangle ABC$  三边上分别取点  $D$ 、 $E$ 、 $F$ , 使得  $AD=BE=CF$ , 连结三点得到  $\triangle DEF$ , 易得  $\triangle ADF \cong \triangle BED \cong \triangle CFE$ , 设  $S_{\triangle ABC}=1$ , 则  $S_{\triangle DEF}=1-3S_{\triangle ADF}$ .

如图①当  $\frac{AD}{AB}=\frac{1}{2}$  时,  $S_{\triangle DEF}=1-3\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ ;

如图②当  $\frac{AD}{AB}=\frac{1}{3}$  时,  $S_{\triangle DEF}=1-3\times\frac{2}{9}=\frac{1}{3}$ ;

如图③当  $\frac{AD}{AB}=\frac{1}{4}$  时,  $S_{\triangle DEF}=1-3\times\frac{3}{16}=\frac{7}{16}$ ;

...

直接写出, 当  $\frac{AD}{AB}=\frac{1}{10}$  时,  $S_{\triangle DEF}=\frac{73}{100}$ .

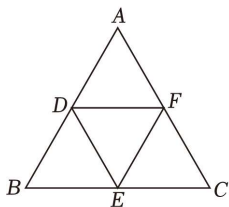


图 ①

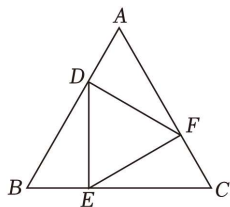


图 ②

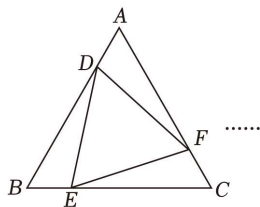


图 ③

【解析】解: 如图①当  $\frac{AD}{AB}=\frac{1}{2}$  时,  $S_{\triangle DEF}=1-3\times\frac{1}{4}=1-3\times\frac{2-1}{2^2}=\frac{1}{4}$ ;

如图②当  $\frac{AD}{AB}=\frac{1}{3}$  时,  $S_{\triangle DEF}=1-3\times\frac{2}{9}=1-3\times\frac{3-2}{3^2}=\frac{1}{3}$ ;

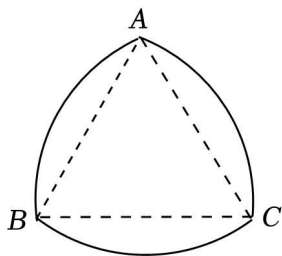
如图③当  $\frac{AD}{AB}=\frac{1}{4}$  时,  $S_{\triangle DEF}=1-3\times\frac{3}{16}=1-3\times\frac{4-1}{4^2}=\frac{7}{16}$ ;

...

当  $\frac{AD}{AB}=\frac{1}{n}$  时,  $S_{\triangle DEF}=1-3\times\frac{n-1}{n^2}$ ;

故当  $\frac{AD}{AB}=\frac{1}{10}$  时,  $S_{\triangle DEF}=1-3\times\frac{10-1}{10^2}=\frac{73}{100}$ .

5. 如图所示的曲边三角形也称作“莱洛三角形”, 它可以按下述方法作出: 作等边三角形  $ABC$ ; 分别以点  $A$ ,  $B$ ,  $C$  为圆心, 以  $AB$  的长为半径作  $\widehat{BC}$ ,  $\widehat{AC}$ ,  $\widehat{AB}$ . 三段弧所围成的图形就是一个曲边三角形. 若该“莱洛三角形”的周长为  $3\pi$ , 则它的面积是  $\frac{9\pi}{2}-\frac{9\sqrt{3}}{2}$ .



【解析】解：由题知，

莱洛三角形的周长可转化为半径长为  $AB$  的圆周长的一半。

又因为莱洛三角形的周长为  $2\pi$ ，

$$\text{所以 } \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot AB = 3\pi,$$

则  $AB = 3$ ，

所以等边  $\triangle ABC$  的边长为 3。

过点  $A$  作  $BC$  的垂线，垂足为  $M$ ，

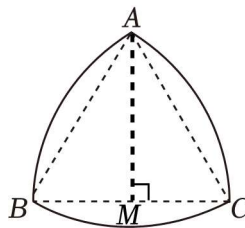
$$\text{则 } BM = \frac{1}{2}BC = \frac{3}{2}BM =.$$

在  $Rt\triangle ABM$  中，

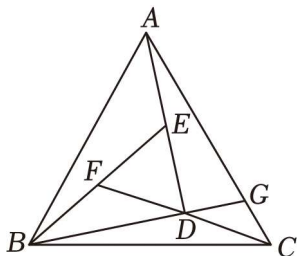
$$AM = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{所以莱洛三角形的面积为: } \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 3^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{9\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$



6. 如图，由三个全等的三角形 ( $\triangle ABE$ ,  $\triangle BCF$ ,  $\triangle CAD$ ) 与中间的小等边三角形  $DEF$  拼成一个大等边三角形  $ABC$ 。连接  $BD$  并延长交  $AC$  于点  $G$ 。若  $AE = ED = 2$ 。则 (1)  $\angle FDB$  的度数是 30°；(2)  $DG$  的长是 1。



【解析】解：∵  $\triangle ABE \cong \triangle BCF \cong \triangle CAD$  (已知)，

$$\therefore AD = BE = CF, AE = BF = DC,$$

$$\because AE = ED = 2,$$

$$\therefore AD = BE = 4,$$

∵  $\triangle DEF$  为等边三角形，

$$\therefore EF = DF = DE = 2, \angle EFD = \angle EDF = 60^\circ,$$

$$\therefore BF = DF = DC = 2,$$

$$\therefore \angle FDB = \angle FBD = \frac{1}{2} \angle EFD = 30^\circ, \angle ADB = \angle EDF + \angle FDB = 90^\circ,$$

如图，过点  $C$  作  $CH \perp BG$  的延长线于点  $H$ ，

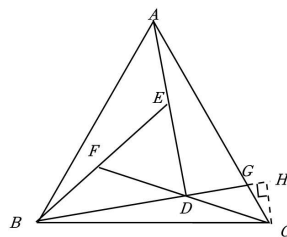
$$\because \angle CDH = 30^\circ,$$

$$\therefore CH = CD \times \sin 30^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1,$$

$$DH = CD \times \cos 30^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

$$\because \angle ADG = \angle CHG, \angle AGD = \angle CGH,$$

$$\therefore \triangle ADG \sim \triangle CHG,$$



$$\begin{aligned}\therefore \frac{DG}{HG} &= \frac{AD}{CH} = \frac{4}{1}, \\ \therefore DG &= \frac{4}{5}DH = \frac{4}{5}\sqrt{3}.\end{aligned}$$

## 7.【探究】

(1) 已知  $\triangle ABC$  和  $\triangle ADE$  都是等边三角形.

①如图 1, 当点  $D$  在  $BC$  上时, 连接  $CE$ . 请探究  $CA$ ,  $CE$  和  $CD$  之间的数量关系, 并说明理由;

②如图 2, 当点  $D$  在线段  $BC$  的延长线上时, 连接  $CE$ . 请再次探究  $CA$ ,  $CE$  和  $CD$  之间的数量关系, 并说明理由.

## 【运用】

(2) 如图 3, 等边三角形  $ABC$  中,  $AB=6$ , 点  $E$  在  $AC$  上,  $CE=2\sqrt{3}$ . 点  $D$  是直线  $BC$  上的动点, 连接  $DE$ , 以  $DE$  为边在  $DE$  的右侧作等边三角形  $DEF$ , 连接  $CF$ . 当  $\triangle CEF$  为直角三角形时, 请直接写出  $BD$  的长.

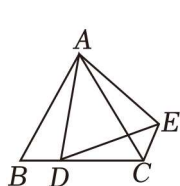


图 1

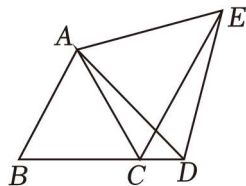


图 2

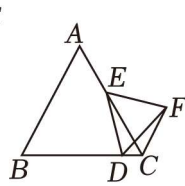
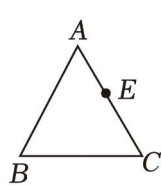


图 3



备用图

【解析】解: (1) ①  $CE+CD=CA$ . 理由如下,

$\because \triangle ABC$  和  $\triangle ADE$  是等边三角形,

$\therefore AB=AC=BC, AD=AE=DE, \angle BAC=\angle DAE=60^\circ,$

$\therefore \angle BAC-\angle DAC=\angle DAE-\angle DAC,$

$\therefore \angle BAD=\angle CAE,$

在  $\triangle ABD$  和  $\triangle ACE$  中,

$$\begin{cases} AB=AC \\ \angle BAD=\angle CAE, \\ AD=AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE(SAS),$

$\therefore CE=BD$

$\therefore BD+CD=BC,$

$\therefore CE+CD=CA.$

②  $CA+CD=CE$ . 理由如下,

$\because \triangle ABC$  和  $\triangle ADE$  是等边三角形,

$\therefore AB=AC=BC, AD=AE=DE, \angle BAC=\angle DAE=60^\circ,$

$\therefore \angle BAC+\angle DAC=\angle DAE+\angle DAC,$

$\therefore \angle BAD=\angle CAE,$

在  $\triangle ABD$  和  $\triangle ACE$  中,

$$\begin{cases} AB=AC \\ \angle BAD=\angle CAE, \\ AD=AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE(SAS),$

$\therefore CE=BD,$

$\therefore CB+CD=BD,$

$\therefore CA+CD=CE.$

(2) 过  $E$  作  $EH \parallel AB$ , 则  $\triangle EHC$  为等边三角形.

①当点  $D$  在  $H$  左侧时, 如图 1,

$\therefore ED=EF, \angle DEH=\angle FEC, EH=EC,$

$\therefore \triangle EDH \cong \triangle EFC(SAS),$

$\therefore \angle ECF=\angle EHD=120^\circ,$

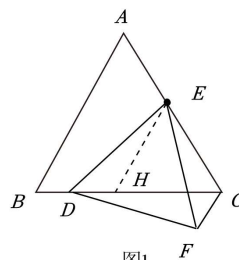


图1

此时  $\triangle CEF$  不可能为直角三角形.

②当点  $D$  在  $H$  右侧, 且在线段  $CH$  上时, 如图 2,

同理可得  $\triangle EDH \cong \triangle EFC$  (SAS),

$$\therefore \angle FCE = \angle EHD = 60^\circ, \angle FEC = \angle DEH < \angle HEC = 60^\circ,$$

此时只有  $\angle CFE$  有可能为  $90^\circ$ ,

当  $\angle CFE = 90^\circ$  时,  $\angle EDH = 90^\circ$ ,

$$\therefore ED \perp CH,$$

$$\therefore CH = CE = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore CD = \frac{1}{2}CH = \sqrt{3},$$

又  $\because AB = 6$ ,

$$\therefore BD = 6 - \sqrt{3}.$$

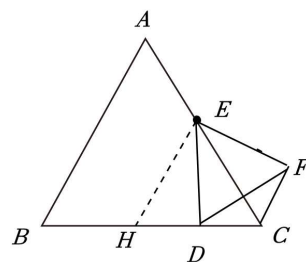


图2

③当点  $D$  在  $H$  右侧, 且  $HC$  延长线上时, 如图 3,

此时只有  $\angle CEF = 90^\circ$ ,

$$\therefore \angle DEF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CED = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ECH = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EDC = \angle CED = 30^\circ,$$

$$\therefore CD = CE = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore BD = 6 + 2\sqrt{3}.$$

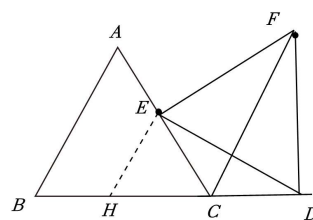


图3

综上:  $BD$  的长为  $6 - \sqrt{3}$  或  $6 + 2\sqrt{3}$ .

8. 如图,  $\triangle ABC$  是  $\odot O$  的内接三角形,  $AB$  是  $\odot O$  的直径, 过点  $B$  作  $\odot O$  的切线与  $AC$  的延长线交于点  $D$ , 点  $E$  在  $\odot O$  上,  $AC = CE$ ,  $CE$  交  $AB$  于点  $F$ .

(1) 求证:  $\angle CAE = \angle D$ ;

(2) 过点  $C$  作  $CG \perp AB$  于点  $G$ , 若  $OA = 3$ ,  $BD = 3\sqrt{2}$ , 求  $FG$  的长.

【解析】(1) 证明:  $\because AB$  是  $\odot O$  的直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle D + \angle CBD = 90^\circ,$$

$$\because BD \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线},$$

$$\therefore \angle ABD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle CBD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle D,$$

$$\because \widehat{AC} = \widehat{AC},$$

$$\therefore \angle E = \angle ABC,$$

$$\therefore \angle E = \angle D,$$

$$\because AC = CE,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle E,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle D;$$

(2) 解: 过点  $C$  作  $CH \perp AE$  于  $H$ , 如图:

$$\because OA = 3,$$

$$\therefore AB = 2OA = 6,$$

$$\text{在 } Rt\triangle ABD \text{ 中, } AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = \sqrt{6^2 + (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{6},$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot BD = \frac{1}{2}AD \cdot BC,$$

