

2025 春季初一数学每日一题打卡 004

比较大小合辑

在学习了“幂的运算法则”后,经常遇到比较幂的大小问题,

对于此类问题,通常有两种解决方法,

一种是将幂化为底数相同的形式,(当底数存在倍数关系时)

另一种是将幂化为指数相同的形式,(当指数存在倍数关系时)

(1) 已知 $x^3=2, y^5=3$, 试比较 x 与 y 的大小;

(2) 比较 4^{31} 、 8^{21} 、 2^{61} 的大小;

(3) 比较 3^{32} 与 2^{48} 的大小;

(4) 如果 $A = \frac{99^9}{9^{99}}, B = \frac{11^9}{9^{90}}$, 试比较 A 与 B 的大小;

那如果底数和指数都没有倍数关系该怎么办呢? 发挥你聪明的小脑袋瓜子, 尝试一下吧!

(5) 比较 17^{14} 与 31^{11} 的大小;

(6) 已知 $m^a=108, m^b=2, m^c=27$, 求 a, b, c 之间的等量关系;

(7) 比较 2023^{-2024} 与 2024^{-2023} 的大小.

试题解析

在学习了“幂的运算法则”后,经常遇到比较幂的大小问题,

对于此类问题,通常有两种解决方法,

一种是将幂化为底数相同的形式,(当底数存在倍数关系时)

另一种是将幂化为指数相同的形式,(当指数存在倍数关系时)

(1) 已知 $x^3=2, y^5=3$, 试比较 x 与 y 的大小;

$$\because x^{15} = (x^3)^5 = 2^5 = 32, y^{15} = (y^5)^3 = 3^3 = 27, \text{且 } 32 > 27, \therefore x^{15} > y^{15}, \therefore x > y.$$

点评:这道题严格来说不属于幂的比较大小,是比较幂的底数的大小.我们的原则标准是转化为同指数的情况下,取3和5的最小公倍数15作为共同的指数即可.

(2) 比较 $4^{31}, 8^{21}, 2^{61}$ 的大小;

$$\because 4^{31} = (2^2)^{31} = 2^{62}, 8^{21} = (2^3)^{21} = 2^{63}, 2^{61} = 2^{61}, \therefore 8^{21} > 4^{31} > 2^{61};$$

点评:这道题明显看出,底数4,8,2均可转化为以2为底的幂的形式,同底.

(3) 比较 3^{32} 与 2^{48} 的大小;

$$\because 3^{32} = (3^2)^{16} = 9^{16}, 2^{48} = (2^3)^{16} = 8^{16}, \therefore 3^{32} > 2^{48};$$

点评:此题明显看出,指数32,48的最大公因数为16,均可转化为以16为指数的幂的形式,同指.

(4) 如果 $A = \frac{99^9}{9^{99}}, B = \frac{11^9}{9^{90}}$, 试比较 A 与 B 的大小;

$$\text{法一: } \because A = \frac{99^9}{9^{99}} = \left(\frac{99}{9^{11}}\right)^9 = \left(\frac{9 \times 11}{9 \times 9^{10}}\right)^9 = \left(\frac{11}{9^{10}}\right)^9 = \frac{11^9}{9^{90}}, B = \frac{11^9}{9^{90}}; \therefore A = B;$$

$$\text{法二: } \because A = \frac{99^9}{9^{99}} = \frac{(9 \times 11)^9}{9^{90+9}} = \frac{9^9 \times 11^9}{9^9 \times 9^{90}} = \frac{11^9}{9^{90}}, B = \frac{11^9}{9^{90}}; \therefore A = B;$$

点评:此题不管法一还是法二,努力找出两个式子分母与分母之间,分子与分子之间的关系.

那如果底数和指数都没有倍数关系该怎么办呢? 发挥你聪明的小脑袋瓜子,尝试一下吧!

(5) 比较 17^{14} 与 31^{11} 的大小;

$$\because 17^{14} > 16^{14}, \therefore 17^{14} > 2^{56} > 2^{55}, \because 2^{55} = 32^{11}, 32^{11} > 31^{11}, \therefore 17^{14} > 31^{11};$$

点评:从解法中可以看出,如果底数和指数都没有直接关系,可以考虑找个桥梁,此处应该是找了16 ($16=2^4$) 这个公共的桥梁,构造了两个数之间的关系.

(6) 已知 $m^a=108, m^b=2, m^c=27$, 求 a, b, c 之间的等量关系;

$$\because 108 = 4 \times 27 = 2^2 \times 27, \therefore m^a = (m^b)^2 \times m^c, \therefore m^a = m^{2b} \times m^c, \therefore m^a = m^{2b+c}, \therefore a = 2b + c.$$

点评:此题看似与比较大小无关,但是 a, b, c 三个字母均为指数,也算是寻找指数的关系了.

(7) 比较 2023^{-2024} 与 2024^{-2023} 的大小.

比较 2023^{-2024} 与 2024^{-2023} 的大小,我们可以采用从“特殊到一般”的思想方法:

$$\because \textcircled{1} 1^{-2} > 2^{-1}; \textcircled{2} 2^{-3} > 3^{-2}; \textcircled{3} 3^{-4} < 4^{-3}; \textcircled{4} 4^{-5} < 5^{-4}.$$

$$\therefore \text{得出如下猜想当 } n \leq 2 \text{ 时, } n^{-(n+1)} > (n+1)^{-n}; \text{当 } n > 2 \text{ 时, } n^{-(n+1)} < (n+1)^{-n}.$$

$$\therefore \text{根据上面的猜想,则有 } 2023^{-2024} < 2024^{-2023}.$$

点评:真的看起来一点关系都没有怎么办,那就尝试数学学习的一般方法从“特殊到一般”的思想方法.