高数见林初三数学每日一练(2.27)

参考答案与解析

1. 如图(公众号:高数见林),若方格纸中每个小正方形的边长均为1,则阴影部分的面积为 (　　)

A. $\frac{5}{2}$　　B. $\frac{8}{3}$　　C. 3　　D. $\frac{15}{4}$

【解析】解:如图:过点G作$GF\perp AC$,垂足为G,过点G作$GE\perp AB$,垂足为E,

由题意得:AG平分$\angle BAC$,

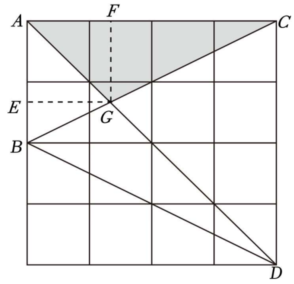
$\therefore GF=GE$,

$\therefore \frac{S_{\Delta ABG}}{S_{\Delta ACG}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot GE}{\frac{1}{2}AC\cdot GF}=\frac{AB}{AC}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$,

$\because \Delta ABC$的面积$=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}\times 2\times 4=4$,

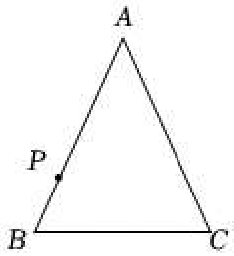
$\therefore \Delta ACG$的面积$=\frac{2}{3}\Delta ABC$的面积$=\frac{2}{3}\times 4=\frac{8}{3}$,

故选:B.



(公众号:高数见林)

2. (公众号:高数见林)如图,在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,$\angle A=55°$,P是AB上的一个动点,则$\angle APC$的度数可能是 (　　)



A. 55°　　B. 62°　　C. 120°　　D. 130°

【解析】解:如图,连接CP.

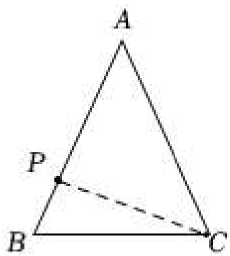
$\because AB=AC$,$\angle A=55°$,

$\therefore \angle B=\angle ACB=\frac{1}{2}(180°-55°)=62.5°$,

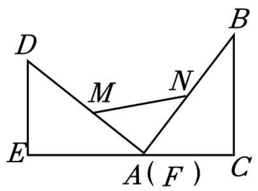
$\because \angle APC=\angle B+\angle PCB$,

$\therefore 62.5°<\angle APC<125°$,

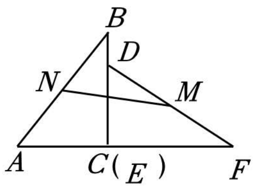
故选:C.



3. 已知(公众号:高数见林)$Rt\Delta ACB\cong Rt\Delta DEF$,其中$\angle C=90°$,$AC=6$,$BC=8$,$M$、$N$分别为$DF$、$AB$的中点,将两个三角形按图①方式摆放,三角形$DEF$从点$A$开始沿$AC$方向平移至点$E$与点$C$重合结束(如图②),在整个平移过程中,$MN$的取值范围是 (　　)



(图①)



(图②)

A. $0<MN<5\sqrt{2}$　　B. $0\leqslant MN\leqslant 5$　　C. $0\leqslant MN\leqslant 5\sqrt{2}$　　D. $1\leqslant MN\leqslant 5\sqrt{2}$

【解析】解:如图①,连接BD,此时MN最大,

$\because \angle C=90°$,$AC=6$,$BC=8$,

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=10$

$\because Rt\Delta ACB\cong Rt\Delta DEF$，

$\therefore DA=AB=10$，$\angle D=\angle BAC$，$\angle E=\angle C=90^\circ$，

$\because \angle D+\angle DAE=90^\circ$，

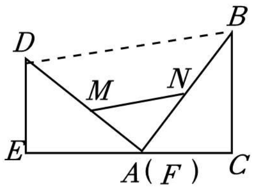
$\therefore \angle DAE+\angle BAC=90^\circ$，

$\therefore \angle DAB=90^\circ$，

$\therefore BD=\sqrt{2}AB=10\sqrt{2}$，

$\because M$、N分别为DF、AB的中点，

$\therefore MN=\frac{1}{2}BD=5\sqrt{2}$；

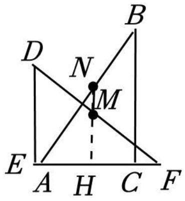


如图②，当$MN\parallel BC$时，MN最小，(公众号:高数见林)

延长MN交AC于点H，根据中位线的性质可得$NH=\frac{1}{2}BC=4$，

$MH=\frac{1}{2}ED=3$，

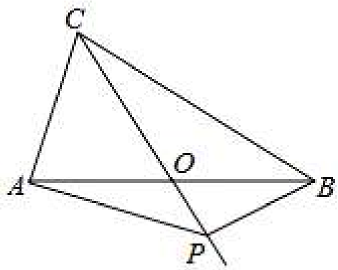
$\therefore MN=4-3=1$，



综上所述，MN的取值范围是$1\leqslant MN\leqslant 5\sqrt{2}$.

故选：D.

4. 如图，在ΔABC中，$AB=BC=6$，$AO=BO$，P是射线CO上的一个动点，$\angle AOC=60^\circ$，则当ΔPAB为直角三角形时，AP的长为__3或$3\sqrt{3}$或$3\sqrt{7}$__.



【解析】解：当$\angle APB=90^\circ$时(如图1)，

$\because AO=BO$，

$\therefore PO=BO$，

$\because \angle AOC=60^\circ$，

$\therefore \angle BOP=60^\circ$，

$\therefore \Delta BOP$为等边三角形，

$\because AB=BC=6$，

$\therefore AP=AB\cdot\sin60^\circ=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$；

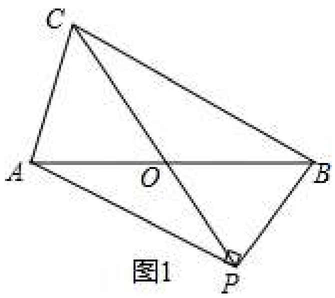


图1

当$\angle ABP=90^\circ$时(如图2)，

$\because \angle AOC=\angle BOP=60^\circ$，

$\therefore \angle BPO=30^\circ$，

$\therefore BP=\frac{OB}{\tan30^\circ}=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=3\sqrt{3}$，

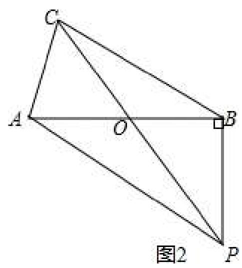


图2

在直角三角形ABP中，(公众号:高数见林)

$AP=\sqrt{6^2+(3\sqrt{3})^2}=3\sqrt{7}$；

如图3，$\because AO=BO$，$\angle APB=90^\circ$，

$\therefore PO=AO$，

$\because \angle AOC=60^\circ$，

$\therefore \Delta AOP$为等边三角形，

$\therefore AP=AO=3$，

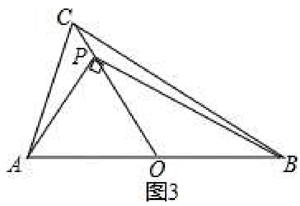
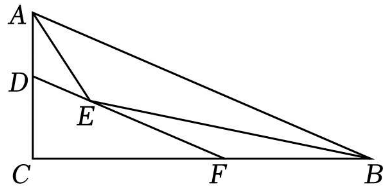


图3

故答案为3或$3\sqrt{3}$或$3\sqrt{7}$.

5. 如图(公众号:高数见林),在 $Rt\Delta ABC$ 中,$\angle C=90°$,$AC=5$,$BC=12$,点 D 是 AC 边上的一点,过点 D 作 $DF\parallel AB$,交 BC 于点 F,作 $\angle BAC$ 的平分线交 DF 于点 E,连接 BE. 若 ΔABE 的面积是13,则 EF 的值是 $\underline{\frac{26}{5}}$.



【解析】解:在 $Rt\Delta ABC$ 中,由勾股定理得,$AB=13$,

$\because \Delta ABE$ 的面积是13,

$\therefore$ 点 E 到 AB 的距离为2,

在 $Rt\Delta ABC$ 中,点 C 到 AB 的距离为 $\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{12\times5}{13}=\frac{60}{13}$,

$\therefore$ 点 C 到 DF 的距离为 $\frac{60}{13}-2=\frac{34}{13}$,

$\because DF\parallel AB$,

$\therefore \Delta CDF\backsim\Delta CAB$,

$\therefore \frac{CD}{CA}=\frac{\frac{34}{13}}{\frac{60}{13}}=\frac{17}{30}=\frac{DF}{AB}$,

$\therefore CD=\frac{17}{6}$, $DF=\frac{221}{30}$,

$\because AE$ 平分 $\angle CAB$,

$\therefore \angle BAE=\angle CAE$,

$\because DF\parallel AB$,

$\therefore \angle AED=\angle BAE$,

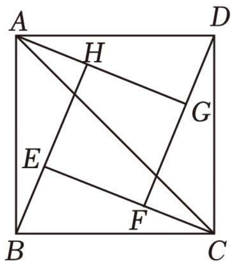
$\therefore \angle DAE=\angle DEA$,

$\therefore DA=DE=CA-CD=\frac{13}{6}$,

$\therefore EF=DF-DE=\frac{221}{30}-\frac{13}{6}=\frac{26}{5}$.

故答案为:$\frac{26}{5}$.

6. 如图,(公众号:高数见林)四个全等的直角三角形拼成"赵爽弦图",得到正方形 $ABCD$ 与正方形 $EFGH$. 连接 AC,若 AG 平分 $\angle CAD$,且正方形 $EFGH$ 的面积为2,则正方形 $ABCD$ 的面积为 $\underline{4+2\sqrt{2}}$.



【解析】解:设直角三角形的长直角边是 a,短直角边是 b,AC 与 BH、DF 分别交于 N、M,

$\therefore$ 正方形 $EFGH$ 的边长是 $a-b$,

$\because$ 正方形 $EFGH$ 的面积为2,

$\therefore (a-b)^2=2$,

$\because a>b$,

$\therefore a-b=\sqrt{2}$,

$\because AG$ 平分 $\angle DAC$,

$\therefore \angle DAG=\angle CAG$,

$\because \angle AGD=\angle AGM=90°$, $AG=AG$,

$\therefore \Delta ADG\cong\Delta AMG(ASA)$,

$\therefore DG=MG=b$,

$\because AH\parallel CF$,

$\therefore \angle HAN=\angle FCM$,

$\because AH=CF$，$\angle AHN=\angle CFM=90°$，

$\therefore \Delta AHN\cong\Delta CFM(ASA)$，

$\therefore FM=NH=a-2b$，

$\because NH\,/\!/\,MG$，

$\therefore \Delta ANH\backsim\Delta AMG$，

$\therefore \dfrac{NH}{MG}=\dfrac{AH}{AG}$，即 $\dfrac{a-2b}{b}=\dfrac{b}{a}$，

$\therefore a^2-2ba-b^2=0$，

$\because a>b>0$，

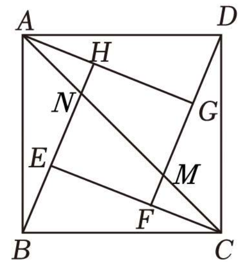
$\therefore a-b=\sqrt{2}b$，

$\therefore \sqrt{2}b=\sqrt{2}$，

$\therefore b=1$，$a=\sqrt{2}+1$，

$\therefore$ 正方形 $ABCD$ 的面积 $=AB^2=a^2+b^2=(\sqrt{2}+1)^2+1^2=4+2\sqrt{2}$；

$\therefore$ 正方形 $ABCD$ 的面积是 $4+2\sqrt{2}$.



(公众号：高数见林)

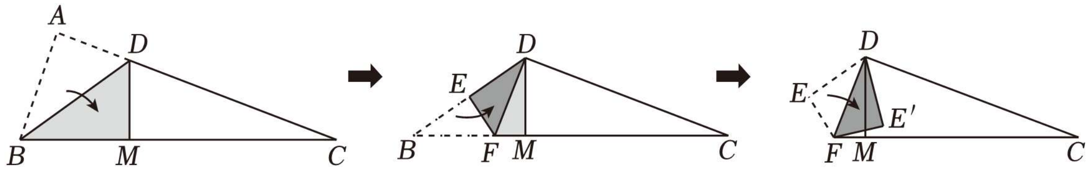
故答案为：$4+2\sqrt{2}$.

7. 如图1(公众号：高数见林)，将 $Rt\Delta ABC(\angle A=90°)$ 纸片按照下列图示方式折叠：①将 ΔABD 沿 BD 折叠，使得点 A 落在 BC 边上的点 M 处，折痕为 BD；②将 ΔBEF 沿 EF 折叠，使得点 B 与点 D 重合，折痕为 EF；③将 ΔDEF 沿 DF 折叠，点 E 落在点 E' 处，展开后如图2，BD、PF、DF、DP 为图1折叠过程中产生的折痕.

(1) 求证：$DP\,/\!/\,BC$；

(2) 若 DE' 落在 DM 的右侧，求 $\angle C$ 的范围；

(3) 是否存在 $\angle C$ 使得 DE' 与 $\angle MDC$ 的角平分线重合，如存在，请求 $\angle C$ 的大小；若不存在，请说明理由.



① ② ③

图1

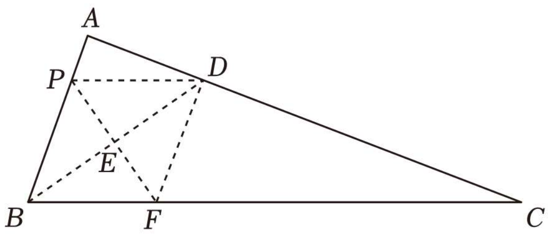
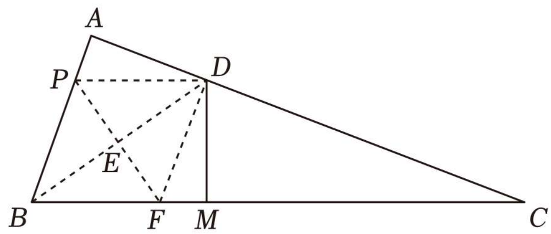


图2



备用图

【解析】(1) 证明：由第二次翻折可得 EF 垂直平分 BD，由第一次翻折可得 $EF=EP$，

$\therefore PF$ 与 BD 垂直且互相平分，

$\therefore$ 四边形 $PBFD$ 是菱形，

$\therefore DP\,/\!/\,BC$；

(2) 解：设 $\angle ABD=\alpha$，

$\because$ 四边形 $PBFD$ 是菱形，

$\therefore PB\,/\!/\,DF$，

$\therefore \angle BDF=\alpha$，$\angle ADP=\angle FDM=\angle C=90-2\alpha$，

当 DE' 落在 DM 的右侧时，$\alpha>90-2\alpha$，

$\therefore \alpha>30°$，

$\therefore 90°-2\alpha<30°$，

$\therefore 0°<\angle C<30°$；

(3) 解：不存在．

若存在 $\angle C$ 使得 DE' 与 $\angle MDC$ 的角平分线重合，

设 $\angle ABD=\alpha$，$\angle ADP=\angle FDM=\angle C=90-2\alpha$，$\angle MDC=2\alpha$，

$\therefore 90-2\alpha+\alpha=\alpha$，

$\therefore \alpha=45^{\circ}$，

$\therefore \angle C=0^{\circ}$，

$\therefore$ 不存在 $\angle C$ 使得 DE 与 $\angle MDC$ 的角平分线重合．