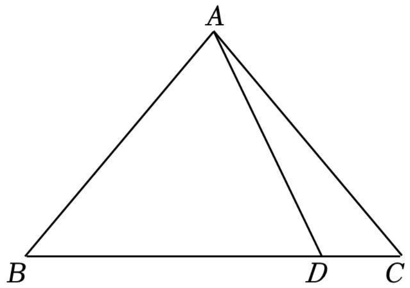
高数见林初三数学每日一练(2.28)

参考答案与解析

1. 如图，在ΔABC中，D是BC上一点，$AB=AC=BD$．若$\angle B=50^\circ$，则$\angle CAD$的度数为 (　　)



A. 10°　　B. 15°　　C. 20°　　D. 25°

【解析】解：$\because AB=AC=BD$，

$\therefore \angle B=\angle C=50^\circ$，$\angle ADB=\angle BAD$，

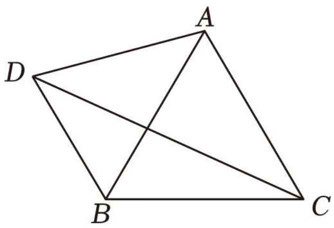
又$\because 2\angle ADB=180^\circ-\angle C=130^\circ$，

$\therefore \angle ADB=65^\circ$，

$\therefore \angle CAD=65^\circ-50^\circ=15^\circ$．

故选：B．

2. 如图，在正三角形ABC中，$AC=2$，$CD=3$，$BD\parallel AC$，则ΔABD的面积是 (　　)



A. $\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{3\sqrt{2}+3}{2}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{2}+3}{3}$　　D. $\dfrac{3\sqrt{2}-3}{3}$

【解析】解：作$BM\perp AC$于M，$AN\perp BD$于N，$DH\perp CB$交CB延长线于H，

$\because \Delta ABC$是等边三角形，

$\therefore \angle ACB=60^\circ$，$BC=AC=2$，

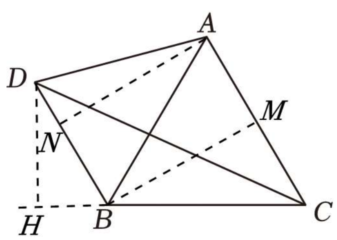
$\because BD\parallel AC$，

$\therefore \angle DBH=\angle ACB=60^\circ$，

设$BD=x$，

$\therefore BH=\dfrac{1}{2}BD=\dfrac{1}{2}x$，$DH=\sqrt{3}BH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$，

$\therefore CH=2+\dfrac{1}{2}x$，



$\because CH^2+DH^2=CD^2$，

$\therefore \left(2+\dfrac{1}{2}x\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2=3^2$，

$\therefore x=\sqrt{6}-1$，

$\therefore BD=\sqrt{6}-1$，

$\because \Delta ABC$是等边三角形，$MB\perp AC$，

$\therefore BM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AC=\sqrt{3}$，

$\because BD\parallel AC$，$AN\perp BD$，$BM\perp AC$，

$\therefore AN=MB=\sqrt{3}$，

$\therefore \Delta ABD$ 的面积 $=\frac{1}{2}BD\cdot AN=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$.

故选：A.

3. 以直角三角形的各边为边分别向外作正方形(如图1)，再把较小的两个正方形按图2的方式放置在最大正方形内．若知道图中阴影部分的面积，则一定能求出　　　(　　)

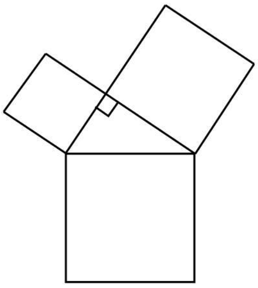


图1

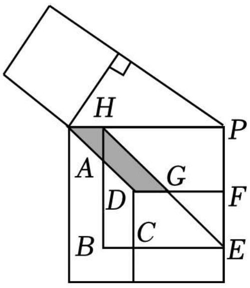


图2

A. 四边形 $ABCD$ 的面积　　　　B. 四边形 $DCEG$ 的面积

C. 四边形 $HGFP$ 的面积　　　　D. ΔGEF 的面积

【解析】解：如图1，设大正方形的面积为 c，中正方形的面积为 b，小正方形的面积为 a，

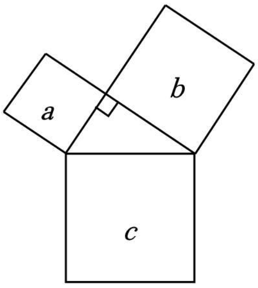


图1

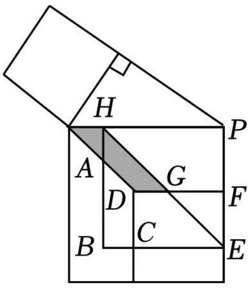


图2

如图2，四边形 $ABCD$ 的面积为 S_1，四边形 $DCEG$ 的面积为 S_2，ΔGEF 的面积为 S_3，四边形 $HGFP$ 的面积为 S_4.

$\because S_4+S_{阴影}=\frac{1}{2}(c-a)$，$S_3+S_4=\frac{1}{2}b$，

$\because c=a+b$，

$\therefore b=c-a$，

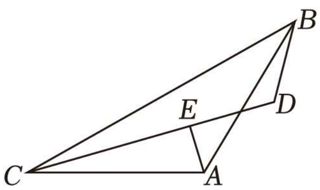
$\therefore S_4+S_{阴影}=S_3+S_4$，

$\therefore S_3=S_{阴影}$，

$\therefore$ 知道图中阴影部分的面积，则一定能求出 S_3，

故选：D.

4. 如图，ΔABC 中，$AB=AC$，$\angle BAC=120^\circ$，ΔBDC 中，$BD=2$，$CD=6$，$\angle BDC=120^\circ$，过 A 作 $AE\perp CD$，垂足为 E，则 AE 的长为 $\underline{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$.



【解析】解：由题意，如图，过 B 分别作 $BH\perp CD$，$BG\perp AD$，垂足分别为 H、G.

$\because \angle BAC=\angle BDC=120^\circ$，

$\therefore A$、D、B、C 四点共圆．

$\therefore \angle BAG=\angle BCH$，$\angle ABC=\angle ADC$.

$\because AB=AC$，$\angle BAC=120°$，

$\therefore \angle ABC=\dfrac{180°-120°}{2}=30°$.

$\therefore \angle ADC=30°$.

又 $\angle BDC=120°$，

$\therefore \angle ADB=150°$.

$\therefore \angle BDG=180°-\angle ADB=30°$.

$\because \angle BGD=90°$，

$\therefore BG=\dfrac{1}{2}BD=1$，$DG=\dfrac{\sqrt{3}}{2}BD=\sqrt{3}$.

在 $Rt\Delta BHD$ 中，$\angle BHD=90°$，$\angle BDH=180°-\angle BDC=60°$，

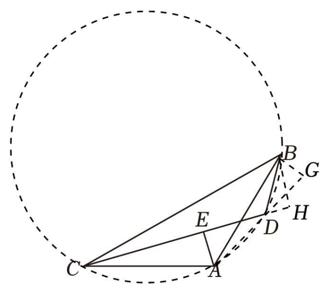
$\therefore DH=\dfrac{1}{2}BD=1$，$BH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}BD=\sqrt{3}$.

$\because \angle BHC=90°$，

$\therefore BC=\sqrt{BH^2+CH^2}=2\sqrt{13}$.

$\therefore \sin\angle BCH=\dfrac{BH}{BC}=\dfrac{\sqrt{39}}{26}$.

$\therefore \sin\angle BAG=\sin\angle BCH=\dfrac{\sqrt{39}}{26}$.



在 $Rt\Delta BGA$ 中，$AB=\dfrac{BG}{\sin\angle BAG}=\dfrac{2\sqrt{39}}{3}$.

$\therefore AG=\sqrt{AB^2-BG^2}=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore AD=AG-DG=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

在 $Rt\Delta AED$ 中，$\angle AED=90°$，$\angle ADC=\angle ABC=30°$，

$\therefore AE=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

故答案为：$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

5. 如图，在 ΔABC 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，以 AC 为边在 ΔABC 下方作 ΔADC，连接 BD，已知 $AD=2$，$DC=5$，则 BD 的最大值为 $\underline{\ 2+5\sqrt{2}\ }$.

【解析】解：如图，以 CD 为直角边，点 C 为直角顶点作等腰直角三角形 CDE，连接 AE，

$\therefore CD=CE=5$，$\angle DCE=90°$，

$\therefore DE=\sqrt{2}CD=5\sqrt{2}$，

在 ΔABC 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，

$\therefore \angle BCD=90°+\angle ACD=\angle ACE$，

$\therefore \Delta BCD\cong\Delta ACE(SAS)$，

$\therefore BD=AE$，

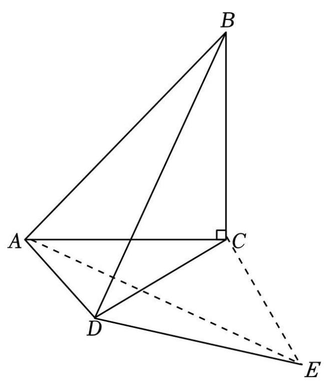
$\because AE\leqslant AD+DE$，

$\therefore BD\leqslant AD+DE$，

$\therefore BD\leqslant 2+5\sqrt{2}$，

$\therefore BD$ 的最大值为 $2+5\sqrt{2}$，

故答案为：$2+5\sqrt{2}$，



6. 如图，已知 $\angle ABC=\angle ADC=90°$，$\angle DAB=45°$，$M$、$N$ 分别是 AC、BD 中点，若 $AC=10$，则 $MN=\underline{\ \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\ }$.

【解析】解：连接 BM，DM，

$\because \angle ABC=\angle ADC=90°$，$M$ 是 AC 的中点，$AC=10$，

$\therefore AM=BM=\dfrac{1}{2}AC=5$，$AM=DM=\dfrac{1}{2}AC=5$，

$\therefore \angle MAB=\angle MBA$，$\angle MAD=\angle MDA$，

$\because \angle BMC=\angle MAB+\angle MBA$，$\angle DMC=\angle MAD+\angle MDA$，

$\therefore \angle BMD=\angle BMC+\angle DMC$

$=2\angle BAM+2\angle DAM$

$=2\angle BAD$

$=90°$，

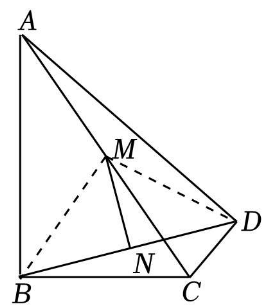
$\because BM=DM=5$，

$\therefore BD=\sqrt{2}BM=5\sqrt{2}$，

$\because N$是BD的中点，

$\therefore MN=\frac{1}{2}BD=\frac{5\sqrt{2}}{2}$，

故答案为：$\frac{5\sqrt{2}}{2}$.



7. 如图，在ΔABC中，$AB=AC$，$\angle BAC=90°$，把$\angle B$折叠，使点B落在AC上的点B'处，折痕为DE，记$\angle CDB'=\alpha$.

(1) 当$\frac{AB'}{B'C}=1$时，$\tan\alpha=$ $\underline{\frac{3}{4}}$；

(2) 当$\frac{AB'}{B'C}=2$时，$\tan\alpha=$ ______；

(3) 当$\frac{AB'}{B'C}=3$时，$\tan\alpha=$ ______；

(4) 猜想：当$\frac{AB'}{B'C}=n$时，$\tan\alpha=$ ______，并证明你的结论.

【解析】解：(1) $\because AB=AC$，$\angle BAC=90°$，

$\therefore \angle B=\angle C=45°$，

$\because$把$\angle B$折叠，使点B落在AC上的点B'处，

$\therefore \angle B=\angle DB'E=45°$，$BE=B'E$，

$\therefore \angle AB'E+\angle DB'C=135°$，

$\because \angle B'DC+\angle DB'C=135°$，

$\therefore \angle AB'E=\angle B'DC=\alpha$，

$\because \frac{AB'}{B'C}=1$，

$\therefore AB=AC=2AB'$，设$AE=a$，$AB'=n$，

$\therefore BE=2n-a$，

$\therefore B'E=2n-a$，

$\because AE^2+AB'^2=EB'^2$，

$\therefore a^2+n^2=(2n-a)^2$，

$\therefore n=\frac{4}{3}a$，

$\therefore \tan\alpha=\tan\angle AB'E=\frac{AE}{AB'}=\frac{a}{\frac{4}{3}a}=\frac{3}{4}$；故答案为：$\frac{3}{4}$；

(2) $\because \frac{AB'}{B'C}=2$，

$\therefore \frac{AB'}{AC}=\frac{2}{3}$，同理设$AE=a$，$AB'=2n$，

$\therefore BE=B'E=3n-a$，

$\therefore a^2+(2n)^2=(3n-a)^2$，

$\therefore n=\frac{6}{5}a$，

$\therefore AB'=\frac{12}{5}a$，

$\therefore \tan\alpha = \tan\angle AB'E = \dfrac{AE}{AB'} = \dfrac{a}{\frac{12}{5}a} = \dfrac{5}{12}$,

故答案为：$\dfrac{5}{12}$；

(3) $\because \dfrac{AB'}{B'C} = 3$，

$\therefore \dfrac{AB'}{AC} = \dfrac{3}{4}$，

同理设 $AE = a$，$AB' = 3n$，

$\therefore BE = B'E = 4n - a$，

$\therefore a^2 + (3n)^2 = (4n - a)^2$，

$\therefore n = \dfrac{8}{7}a$，

$\therefore AB' = \dfrac{24}{7}a$，

$\therefore \tan\alpha = \tan\angle AB'E = \dfrac{AE}{AB'} = \dfrac{a}{\frac{24}{7}a} = \dfrac{7}{24}$，故答案为：$\dfrac{7}{24}$.

(4) $\dfrac{2n+1}{2n(n+1)}$；

理由如下：

当 $\dfrac{AB'}{B'C} = n$ 时，则 $AB' = nB'C$，

设 $AB = AC = (n+1)x$，则 $AB' = nx$，

设 $AE = a$，则 $B'E = BE = [(a+1)x - a]$，

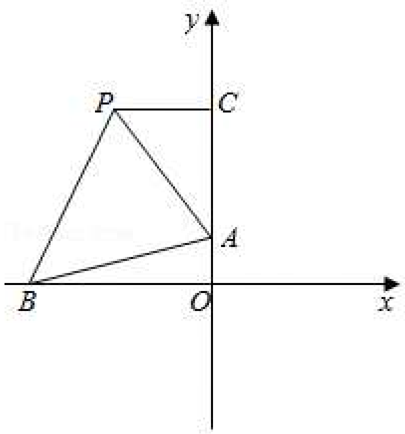
$\therefore a^2 + (nx)^2 = [(n+1)x - a]^2$，

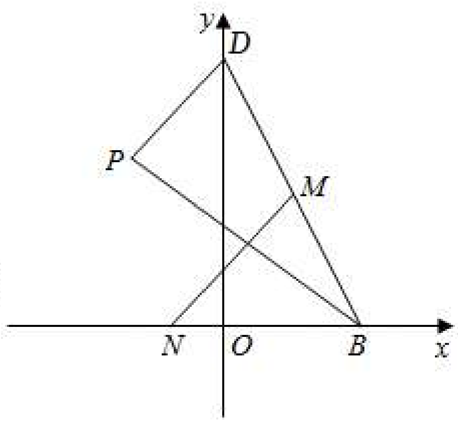
$\therefore a = \dfrac{2n+1}{2n+2}x$，

$\therefore \tan\alpha = \tan\angle AB'E = \dfrac{AE}{AB'} = \dfrac{2n+1}{2n(n+1)}$.

故答案为：$\dfrac{2n+1}{2n(n+1)}$.

8. 如图，在平面直角坐标系中，点 P 的坐标为 $(a、b)$，且 a、b 满足 $a^2 + 4a + 4 = \sqrt{b-4} + \sqrt{4-b}$，点 B 为 x 轴上动点，过点 P 作 $PC \perp y$ 轴于点 C.





(1) 求 O、P 两点间的距离；

(2) 如图 1，点 A 为 y 轴上一点，连接 PA、PB、AB，若 $B(-4,0)$，且 $\angle APB = 45^\circ + \dfrac{1}{2}\angle PAC$，求点 A 的坐标；

(3) 如图 2，过点 P 作 $PD \perp PB$ 交 y 轴正半轴于点 D，点 M 为 BD 的中点，点 $N(-1,0)$，则 MN 的最小值为 $\underline{\dfrac{4\sqrt{5}}{5}}$（请直接写出结果）.

【解析】】解：(1) 如图 1，连接 OP，

$\because a^2 + 4a + 4 = \sqrt{b-4} + \sqrt{4-b}$，

$\therefore (a+2)^2=\sqrt{b-4}+\sqrt{4-b}$，

$\because \begin{cases} b-4\geqslant 0 \\ 4-b\geqslant 0 \end{cases}$，

$\therefore b=4$，

$\therefore a=-2$，

$\therefore P(-2,4)$，

$\because PC\perp OC$，

$\therefore PC=2$，$OC=4$，

$\therefore OP=\sqrt{PC^2+OC^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$；

(2) 如图2，过点B作$BD\perp CP$交CP延长线于点D，作$BE\perp AP$于点E，

$\because B(-4,0)$，$C(0,4)$，

$\therefore OB=OC=4$，

$\because \angle BOC=\angle OCD=\angle BDC=90°$，

$\therefore$ 四边形$OBDC$是正方形，

$\therefore BD=OB=OC=4$，

$\because \angle APB=45°+\frac{1}{2}\angle PAC$，

$\therefore 2\angle APB=90°+\angle PAC$，

$\because \angle BPD+\angle APB=90°+\angle PAC$，

$\therefore \angle BPD=\angle APB$，即$PB$平分$\angle APD$，

$\because BD\perp PD$，$BE\perp PA$，

$\therefore BD=BE=4$，

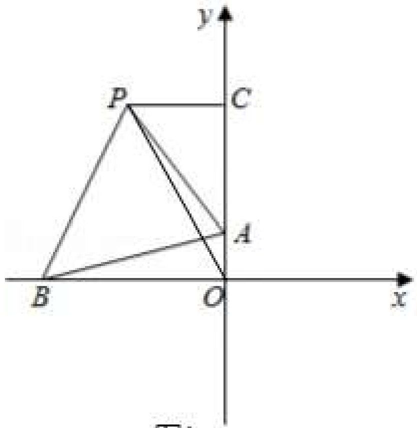


图1

设$OA=x$，

①当点A在x轴上方时，$AC=4-x$，

$\therefore PA=\sqrt{PC^2+AC^2}=\sqrt{2^2+(4-x)^2}=\sqrt{x^2-8x+20}$，

$\because S_{\triangle ABP}=S_{正方形OBDC}-S_{\triangle BDP}-S_{\triangle APC}-S_{\triangle AOB}$，

$\therefore \frac{1}{2}\times\sqrt{x^2-8x+20}\times 4=4\times 4-\frac{1}{2}\times 4\times 2-\frac{1}{2}\times 2(4-x)-\frac{1}{2}\times 4x$，

解得：$x_1=4$（舍去），$x_2=\frac{4}{3}$，

$\therefore A\left(0,\frac{4}{3}\right)$；

②当点A在x轴下方时，$AC=4+x$，

$\therefore PA=\sqrt{PC^2+AC^2}=\sqrt{2^2+(4+x)^2}=\sqrt{x^2+8x+20}$，

$\because S_{\triangle ABP}=S_{正方形OBDC}-S_{\triangle BDP}-S_{\triangle APC}+S_{\triangle AOB}$，

$\therefore \frac{1}{2}\times\sqrt{x^2+8x+20}\times 4=4\times 4-\frac{1}{2}\times 4\times 2-\frac{1}{2}\times 2(4+x)+\frac{1}{2}\times 4x$，

解得：$x_1=-4$，$x_2=-\frac{4}{3}$，

$\because x>0$，

$\therefore x_1=-4$，$x_2=-\frac{4}{3}$均不符合题意，此时无解；

综上所述，点A的坐标为：$\left(0,\frac{4}{3}\right)$；

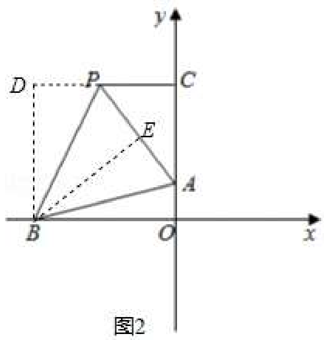


图2

(3) 如图3，设$M(x,y)$，

$\because$ 点M是BD中点，点B、D分别在x轴、y轴上，

$\therefore B(2x,0)$，$D(0,2y)$，

$\because \angle DPB=90°$，$DM=BM$，

$\therefore MP=\frac{1}{2}BD$，

$\therefore \sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(2x)^2+(2y)^2}$，

化简，得：$y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$，

$\therefore$ 点 M 的运动轨迹是直线 $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$，

$\therefore MN$ 的最小值即为点 $N(-1,0)$ 到直线 $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ 的距离，

过点 N 作直线 $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ 的垂线，垂足为 Q，连接 MP，OM，OP，

$\because MP=OM=\frac{1}{2}BD$，

$\therefore$ 点 M 在线段 OP 的垂直平分线 GM 上，

$\because G(-1,2)$，

设直线交 y 轴于点 H，交 x 轴于点 K，则 $OK=5$，$OH=\frac{5}{2}$，$NG=2$，$NK=4$，

$\because GN\perp NK$，

$\therefore GK=\sqrt{GN^2+NK^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$，

$\because NQ\perp GK$，

$\therefore NQ\cdot GK=GN\cdot NK$，

即 $NQ\times 2\sqrt{5}=2\times 4$，

$\therefore NQ=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore MN$ 的最小值为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

故答案为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

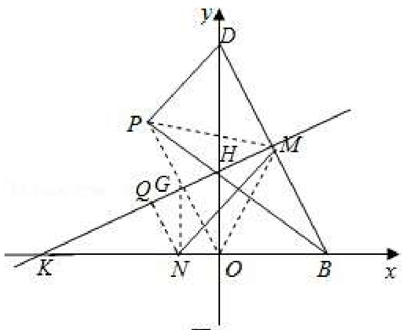


图3