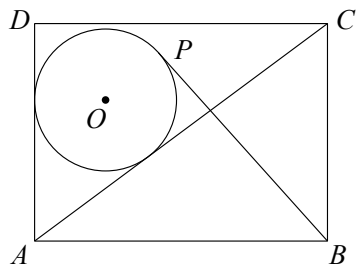


2025 春季初三数学每日一题打卡 006

如图,矩形 $ABCD$ 中, $AB=8$, $BC=6$, $\odot O$ 与边 AD 、对角线 AC 均相切,过点 B 作 $\odot O$ 的切线,切点为 P ,则切线长 BP 的最小值为 _____.



试题解析

如图,矩形 $ABCD$ 中, $AB=8$, $BC=6$, $\odot O$ 与边 AD 、对角线 AC 均相切,过点 B 作 $\odot O$ 的切线,切点为 P ,则切线长 BP 的最小值为 $4\sqrt{3}$.

思路:因为切线故有 $BP^2 = OB^2 - OP^2$,可以考虑设半径,用含半径的函数表示 BP^2 ,关键问题是如何用 r 来表示所有相关线段. AO 是角平分线是核心解题信息.

【解答】解:设 $\odot O$ 与 AD 、 AC 分别相切于点 G 、 H ,连接 OG 、 OH 、 OP 、 OB ,连接 AO 并延长交 CD 于 E ,过点 E 作 $EF \perp AC$ 于 F ,过点 O 作 $OK \perp AB$ 于 K ,如图,

则 $\angle AGO = \angle AHO = \angle CFE = \angle AFE = \angle BKO = \angle AKO = 90^\circ$, $OG = OH = OP$,

$\therefore OG \perp AD$, $OH \perp AC$, $OG = OH$,

$\therefore AO$ 平分 $\angle CAD$, $\therefore \angle EAD = \angle EAF$,

\therefore 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore CD = AB = 8$, $AD = BC = 6$, $\angle D = \angle BAD = 90^\circ$,

$\therefore AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$, $ED \perp AD$,

$\therefore AO$ 平分 $\angle CAD$, $ED \perp AD$, $EF \perp AC$, $\therefore EF = ED$,

$\therefore AE = AE$, $\therefore Rt\triangle AED \cong Rt\triangle AEF (HL)$, $\therefore AF = AD = 6$,

$\therefore CF = AC - AF = 10 - 6 = 4$,

$\therefore \angle CFE = \angle CDA = 90^\circ$, $\angle ECF = \angle ACD$,

$\therefore \triangle CEF \sim \triangle CAD$,

$\therefore \frac{EF}{AD} = \frac{CF}{CD}$, 即 $\frac{EF}{6} = \frac{4}{8}$, 解得 $a = 3$,

$\therefore DE = EF = 3$, $CE = 5$,

(其实前面的求解,倍半角熟悉的话,可以直接得出.)

$\therefore AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$,

设 $\odot O$ 的半径为 r , 则 $OG = OH = OP = r$,

$\therefore \angle AGO = \angle ADE = 90^\circ$, $\angle OAG = \angle EAD$,

$\therefore \triangle AOG \sim \triangle AED$,

$\therefore \frac{OG}{DE} = \frac{AG}{AD}$, 即 $\frac{r}{3} = \frac{AG}{6}$, $AG = 2r$, (345 三角形的半角是 $\frac{1}{2}$ 角)

$\therefore \angle AGO = \angle GAK = \angle AKO = 90^\circ$,

\therefore 四边形 $AGOK$ 是矩形,

$\therefore OK = AG = 2r$, $AK = OG = r$,

$\therefore BK = AB - AK = 8 - r$,

$\therefore OB^2 = OK^2 + BK^2 = (2r)^2 + (8 - r)^2 = 5r^2 - 16r + 64$,

$\therefore BP$ 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore \angle BPO = 90^\circ$,

$\therefore BP = \sqrt{OB^2 - OP^2} = \sqrt{5r^2 - 16r + 64 - r^2} = 2\sqrt{(r-2)^2 + 12}$,

\therefore 当 $r = 2$ 时, $BP_{\text{最小值}} = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$.

