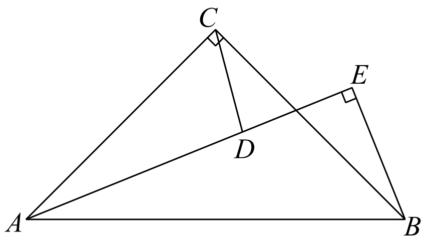
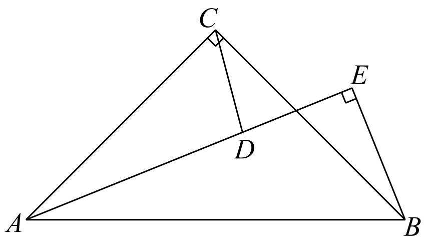
2025春季初三数学每日一题打卡006

如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$CA=CB=3$，线段 CD 绕点 C 在平面内旋转，过点 B 作 AD 的垂线，交射线 AD 于点 E． 若 $CD=1$，则 AE 的取值范围是______．



试题解析、

如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$CA=CB=3$，线段 CD 绕点 C 在平面内旋转，过点 B 作 AD 的垂线，交射线 AD 于点 E．若 $CD=1$，则 AE 的取值范围是__ $2\sqrt{2}-1\leqslant AE\leqslant 2\sqrt{2}+1$ __．



解：由条件可知 $\angle BAC=\angle ABC=\frac{1}{2}\times 90°=45°$，

由旋转性质可知：点 D 在以点 C 为圆心，1 为半径的圆上，

$\because BE\perp AE$，$\therefore \angle AEB=90°$，$\therefore$ 点 E 在以 AB 为直径的圆上，在 $Rt\triangle ABE$ 中，$AE=AB\cdot\cos\angle BAE$，

$\because AB$ 为定值，$\therefore$ 当 $\cos\angle BAE$ 最大时，AE 最大，$\cos\angle BAE$ 最小时，AE 最小，

$\therefore$ 当 AE 与 $\odot C$ 相切于点 D，且点 D 在 $\triangle ABC$ 内部时，$\angle BAE$ 最大，AE 最小，

连接 CD，CE，如图 1 所示：

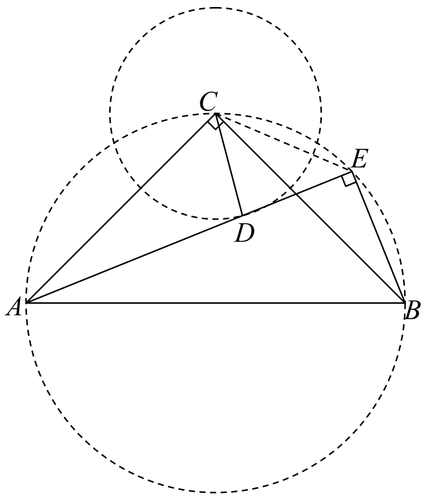


图1

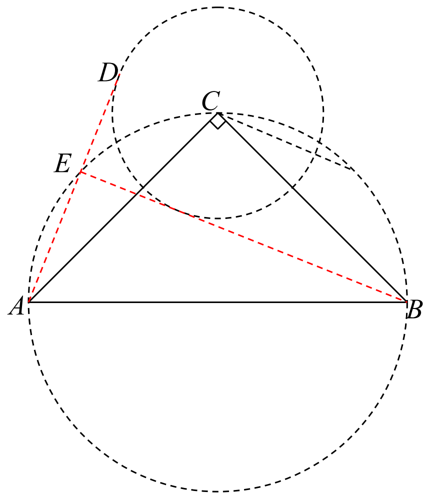


图2

则 $CD\perp AE$，$\therefore \angle ADC=\angle CDE=90°$，$\therefore AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$，

$\because \angle CED=\angle ABC=45°$，$\angle CDE=90°$，$\therefore \triangle CDE$ 为等腰直角三角形，

$\therefore DE=CD=1$，$\therefore AE=AD+DE=2\sqrt{2}+1$，即 AE 的最大值为 $2\sqrt{2}+1$；

当 AE 与 $\odot C$ 相切于点 D，且点 D 在 $\triangle ABC$ 外部时，$\angle BAE$ 最大，AE 最小，连接 CD，CE，如图 2 所示：

则 $CD\perp AE$，$\therefore \angle CDE=90°$，$\therefore AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$，

$\because$ 四边形 $ABCE$ 为圆内接四边形，$\therefore \angle CEA=135°$，$\therefore \angle CED=45°$，

$\because \angle CDE=90°$，$\therefore \triangle CDE$ 为等腰直角三角形，$\therefore DE=CD=1$，$\therefore AE=AD-DE=2\sqrt{2}-1$，

即 AE 的最小值为 $2\sqrt{2}-1$；

故答案为：$2\sqrt{2}-1\leqslant AE\leqslant 2\sqrt{2}+1$.