2026春季初二数学每日一题打卡007

如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 是 CD 边上一点，连接 AE、BE，$\angle AEB=90^\circ$，$AE=BE$，点 F 是线段 AE 上一动点，连接 BF.

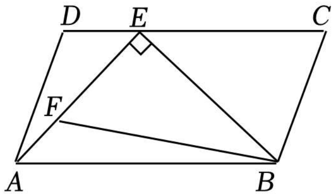


图1

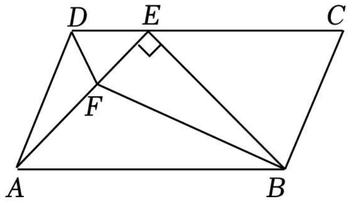


图2

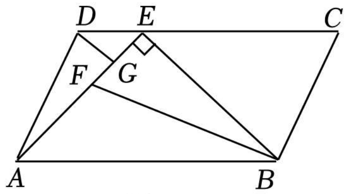


图3

(1) 如图1，若 $EF=2AF$，$BF=2\sqrt{13}$，求平行四边形 $ABCD$ 的面积；

(2) 如图2，若 $BF\perp BC$，连接 DF，求证：$BF=BC+DF$；

(3) 如图3，线段 AE 上另有一点 G，满足 $FG=\sqrt{2}$，连接 DG．若 $AB=12$，$DE=3$，请直接写出 $BF+FG+DG$ 的最小值.

试题解析

如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 是 CD 边上一点，连接 AE、BE，$\angle AEB=90^\circ$，$AE=BE$，点 F 是线段 AE 上一动点，连接 BF.

(1) 如图1，若 $EF=2AF$，$BF=2\sqrt{13}$，求平行四边形 $ABCD$ 的面积；

(1) 解：设 $AE=3a$，

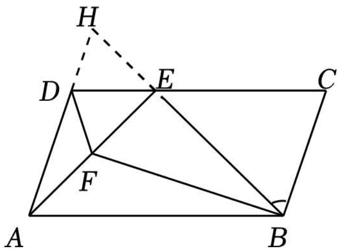
$\because AE=BE$，$\therefore BE=AE=3a$，$\because EF=2AF$，$\therefore EF=2a$，$AF=a$，

$\because \angle AEB=90^\circ$，$\therefore Rt\triangle BEF$ 中，$BF=\sqrt{EF^2+BE^2}=\sqrt{(2a)^2+(3a)^2}=\sqrt{13}a=2\sqrt{13}$，

$\therefore a=2$，$\therefore AE=BE=6$，$\therefore S_{\square ABCD}=2S_{\triangle AEF}=2\times\frac{1}{2}\times 6\times 6=36$；

(2) 如图2，若 $BF\perp BC$，连接 DF，求证：$BF=BC+DF$；

(2) 证明：如图，延长 BE，AD 交于点 H，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AD\parallel BC$，$\therefore \angle H=\angle CBE$，

$\because BF\perp AD$，$\therefore BF\perp BC$，$\therefore \angle CBF=90^\circ$，$\therefore \angle CBE=90^\circ-\angle EBF=\angle BFE$，$\therefore \angle H=\angle BFE$，

$\because AE=BE$，$\therefore \triangle AEH\cong\triangle BEF(AAS)$，$\therefore AH=BF$，$EH=EF$，

$\because AD\parallel BC$，$\therefore \angle HED=\angle EBA$，$\angle FED=\angle EAB$，$\because \angle EBA=\angle EAB$，$\therefore \angle HED=\angle FED$，

$\therefore ED=ED$，$\therefore \triangle HED\cong\triangle FED(SAS)$，$\therefore DH=DF$，

$\because AD=BC$，$\therefore BF=AH=AD+DH=BC+DF$，$\therefore BF=BC+DF$；

(3) 如图3，线段 AE 上另有一点 G，满足 $FG=\sqrt{2}$，连接 DG. 若 $AB=12$，$DE=3$，请直接写出 $BF+FG+DG$ 的最小值.

(3) 解：如图，过点 D 作 $DM\parallel AE$，延长 BA 交 DM 于点 M，过点 F 作 $FN\parallel DG$ 交 AD 于点 N，连接 BN，

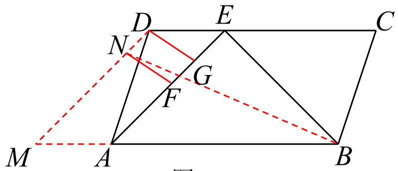
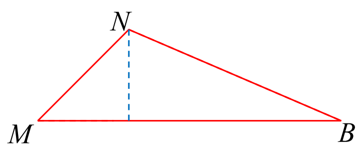


图1



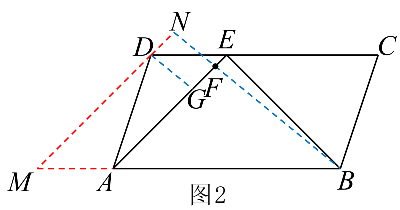


图2

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AB\parallel CD$，$\therefore$ 四边形 $DEAM$ 是平行四边形，$\therefore AM=DE=3$，

$\therefore MB=AB+AM=12+3=15$，又 $\because FN\parallel DG$，$\therefore$ 四边形 $DGFN$ 是平行四边形，

$\therefore ND=FG$，$DG=FN$，又 $\because FG=\sqrt{2}BF+FG+DG\geqslant BN+\sqrt{2}$，

$\therefore$ 当 N，F，B 三点共线时，$BF+FG+DG$ 取得最小值，最小值为 $BN+\sqrt{2}$，

又 $\because \triangle AEB$ 中，$\angle AEB=90^\circ$，$AE=BE$，

$\therefore \angle EAB=45^\circ$，$AE=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=6\sqrt{2}$，$\therefore DM=6\sqrt{2}$，$\therefore MN=5\sqrt{2}$ 或 $7\sqrt{2}$，

$\because DM\parallel AE$，$\therefore \angle NMB=45^\circ$，

$\because$ 在 $\triangle MNB$ 中，$\angle NMB=45^\circ$，$MN=5\sqrt{2}$ 或 $7\sqrt{2}$，$MB=15$，

$\therefore NB=5\sqrt{5}$ 或 $\sqrt{113}$（$\sqrt{113}$ 就是图2的情况），

$\therefore BF+FG+DG$ 的最小值为 $\sqrt{113}+\sqrt{2}$.