2026春季初一数学每日一题打卡007

杨辉三角

> 如果将$(a+b)^n$（n为非负整数）的展开式的每一项按字母a的次数由大到小排列，就可以得到下面的等式：
>
> $(a+b)^0=1$，它只有一项，系数为1；
>
> $(a+b)^1=a+b$，它有两项，系数分别为1，1；
>
> $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，它有三项，系数分别为1，2，1；
>
> $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$，它有四项，系数分别为1，3，3，1；
>
> 将上述每个式子的各项系数排成该表（如图）．观察该表，可以发现每一行的首末都是1，并且下一行的数比上一行多1个，中间各数都写在上一行两数的中间，且等于它们的和．按照这个规律可以将这个表继续往下写．

利用上面的规律，完成以下问题：

(1) $(a+b)^4$的展开式为____________________；

(2) $(a+b)^8$的展开式中共有_________项，从左往右第三项的系数是______；

(3) 计算：$3^4+4\times3^3+6\times3^2+4\times3+1$；

(4) 代数推理：已知m为整数，求证：$(m+3)^3-(m-3)^3$能被18整除．

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

试题解析

杨辉三角

如果将 $(a+b)^n$(n 为非负整数)的展开式的每一项按字母 a 的次数由大到小排列，就可以得到下面的等式： $(a+b)^0=1$，它只有一项，系数为 1； $(a+b)^1=a+b$，它有两项，系数分别为 1，1； $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，它有三项，系数分别为 1，2，1； $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$，它有四项，系数分别为 1，3，3，1； 将上述每个式子的各项系数排成该表(如图)．观察该表，可以发现每一行的首末都是 1，并且下一行的数比上一行多 1 个，中间各数都写在上一行两数的中间，且等于它们的和．按照这个规律可以将这个表继续往下写．

利用上面的规律，完成以下问题：

(1) $(a+b)^4$ 的展开式为 $\underline{a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4}$；

解：(1) 每一行的首末都是 1，并且下一行的数比上一行多 1 个，中间各数都写在上一行两数的中间，且等于它们的和．

根据题意，$(a+b)^4$ 的展开式有五项，系数分别为 1，4，6，4，1，

∴ $(a+b)^4$ 的展开式为 $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$．

(2) $(a+b)^8$ 的展开式中共有__九__项，从左往右第三项的系数是__28__；

(2) 根据题意，$(a+b)^5$ 的展开式有六项，系数分别为 1，5，10，10，5，1，

$(a+b)^6$ 的展开式有七项，系数分别为 1，6，15，20，15，6，1，

$(a+b)^7$ 的展开式有八项，系数分别为 1，7，21，35，35，21，7，1，

$(a+b)^8$ 的展开式有九项，系数分别为 1，8，28，56，70，56，28，8，1，

∴ $(a+b)^8$ 的展开式中从左往右第三项的系数是 28．故答案为：九，28；

(3) 计算：$3^4+4\times3^3+6\times3^2+4\times3+1$；

(3) 原式 $=3^4+4\times3^3\times1+6\times3^2\times1^2+4\times3\times1^3+1^4=(3+1)^4=4^4=256$；

(4) 代数推理：已知 m 为整数，求证：$(m+3)^3-(m-3)^3$ 能被 18 整除．

(4) $(m+3)^3=m^3+3m^2\times3+3m\times3^2+3^3=m^3+9m^2+27m+27$，

$(m-3)^3=m^3+3m^2\times(-3)+3m\times(-3)^2+(-3)^3=m^3-9m^2+27m-27$，

∴ $(m+3)^3-(m-3)^3$

$=(m^3+9m^2+27m+27)-(m^3-9m^2+27m-27)$

$=m^3+9m^2+27m+27-m^3+9m^2-27m+27$

$=18m^2+54$

$=18(m^2+3)$，

∵ $18(m^2+3)$ 能被 18 整除，

∴ $(m+3)^3-(m-3)^3$ 能被 18 整除．